Untersuchungen zur Analyse linearer, quellenfreier n-Tore und zur Analyse und Synthese von Zirkulatoren

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von
Walter Barbirz
aus Schwagstorf

Marburg/Lahn 1970

Fotodruck E. Symon · 355 Marburg/Lahn · Friedrichstr. 3

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534910_0058

Untersuchungen zur Analyse linearer, quellenfreier n-Tore und zur Analyse und Synthese von Zirkulatoren

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von
Walter Barbirz
aus Schwagstorf

Marburg/Lahn 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 2. Oktober 1970

Tag der mündlichen Prüfung am 4. November 1970

Berichterstatter: Prof. Dr. H. Wolter

Mitberichterstatter: Prof. Dr. S. Blume

Inhaltsverzeichnis

	Seite:
Einleitung	4
1. Erläuterungen zum Gegenstand der Untersuchungen	6
1.1. Klassifizierung linearer Eintore	6
1.2. Definition des quellenfreien, linearen n-Tors	8
1.3. Zusammenschalten von n-Toren	10
2. Impedanz- (Admittanz-) matrixtheorie	13
2.1. Beschreibung von n-Toren durch eine Impedanz- bzw. Admittanzmatrix und verwandte Matrixformen	13
2.2. Transformationseigenschaften von n-Toren	16
2.2.1. Strom- und Spannungstransformation	16
2.2.2. Impedanz- und Admittanztransformation	20
2.2.3. Schwierigkeiten bei der Beschreibung des Leistungsübertragungsverhaltens	21
3. Streumatrixtheorie	23
3.1. Transformation von Strömen und Spannungen in 'Leistungswellen'	23
3.2. Definition und physikalische Bedeutung der Streumatrix	26
3.3. Beziehungen zwischen Streumatrix und Impedanz- bzw. Admittanzmatrix	29
3.4. Energetische n-Tor Klassifizierungen	30
3.5. Bedeutung und Realisierung von Bezugsimpedanzen; Streumatrixtransformation durch Wechsel der Bezugsimpedanzen	31
3.6. Eingangs- und Ausgangsreflexionsfaktor eines n-Tors	34
3.7. Reflexionsfaktortransformation	38
4. Bestimmung der Eigenschaften eines n-Tors	42
4.1. Grundsätzliche Probleme	42
4.2. Berechnung der Streumatrix aus Eingangsreflexionsfaktoren	44
4.2.1. Beschreibung der Methode und Realisierung von Abschlüssen	44

4.2.2. Streumatrixbestimmung aus Kurzschluß- und formalen Leistungsanpassungsmessungen 45
4.2.2.1. Reziproke n-Tore 45
4.2.2.2. Nichtreziproke n-Tore 46
4.2.2.3. Nichtreziproke, zyklisch symmetrische Dreitore 51
4.2.2.4. Nichtreziproke, zyklisch symmetrische Viertore 53
4.2.3. Streumatrixbestimmung aus Kurzschluß- und Leerlaufmessungen 55
4.2.3.1. Beschreibung möglicher Verfahren 55
4.2.3.2. Reziproke Zweitore 58
4.2.3.3. Nichtreziproke, zyklisch symmetrische Dreitore 60
4.2.3.4. Nichtreziproke, zyklisch symmetrische Viertore 61

5. Analyse und Synthese von Zirkulatoren 64
5.1. Definition des idealen n-Tor Zirkulators 64
5.2. Abweichungen vom idealen Verhalten, der reale Zirkulator 67
5.3. Streumatrixanalyse realer Dreitorzirkulatoren 72
5.4. Zirkulatorsynthese 76
5.4.1. Das Problem der Streumatrixsynthese 76
5.4.2. Streumatrixsynthese mit Hilfe von Anpassungs-2n-Toren 77
5.4.3. Streumatrixsynthese durch Bezugsimpedanzwechsel 83
5.4.4. Dreitorzirkulatorsynthese 85

6. Experimentelle Untersuchungen 95
6.1. Aufgabenbereich und Meßplatz 95
6.2. Das Problem der Fehlerfortpflanzung 99
6.2.1. Meßfehler beim Z-g-Diagraphen 99
6.2.2. Fehlerfortpflanzung 101
6.2.3. Auswirkungen auf die Methoden der Streumatrixanalyse aus Eingangsreflexionsfaktoren 105
6.2.3.1. Reziproke n-Tore 105
6.2.3.2. Nichtreziproke n-Tore 110
6.3. Untersuchungen an einem nichtreziproken, zyklisch symmetrischen Dreitor 123
6.3.1. Das Meßobjekt 123

6.3.2. Die Streumatrix in Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld und der Betriebsfrequenz 126
6.3.3. Dimensionierungen von Anpassungszweitoren für eine Zirkulatorsynthese 137
6.3.3.1. Vorbemerkungen über bisherige Versuche 137
6.3.3.2. Zirkulatorsynthese durch verlustlose Anpassungszweitore 138
6.3.3.3. Berechnung verlustbehafteter Anpassungszweitore für eine Zirkulatorsynthese mit $S'_{11} = 0$ 143
6.3.3.4. Optimierungsverfahren zur Synthese der Anpassungszweitore 149

Anhang 153
Beweis von Gleichung (197) 153

Zusammenfassung 156

Literaturverzeichnis 158

Einleitung

Innerhalb gewisser Betriebsgrenzen gehören sehr viele Bauelemente der Hochfrequenztechnik zur Gruppe der zeitunabhängigen, linearen und quellenfreien n-Tore, deren Untersuchung diese Arbeit gewidmet ist (genaue Definition Abschnitt 1.). Bei allen Betrachtungen ist eine feste Betriebsfrequenz vorausgesetzt, und die Frequenzabhängigkeit von n-Tor Eigenschaften wird vollständig ausgeklammert. Da die Betriebsfrequenz jedoch willkürlich ist, kann man alle Überlegungen für verschiedene feste Frequenzen durchführen und damit nachträglich frequenzabhängiges Verhalten untersuchen. Grob unterteilt man n-Tore nach dem Gesichtspunkt, ob sie in ihren geometrischen Abmessungen klein gegen die Wellenlänge der auftretenden Torspannungen und -ströme oder mit ihr vergleichbar sind. Zur ersten Klasse gehören im wesentlichen alle Netzwerke aus linearen, konzentrierten Schaltelementen. Unabhängige Spannungs- und Stromquellen müssen entfernt worden sein, während gesteuerte Quellen (Röhren und Transistoren) auftreten dürfen, und die verbleibenden Klemmen zum Netzwerk faßt man als neue 'Tore' auf. n-Tore aus Netzwerken sind nur am Rande Gegenstand der Arbeit. Die Klasse der im Mittelpunkt der Betrachtungen stehenden, mit der Wellenlänge vergleichbaren n-Tore umfaßt alle Hochfrequenz- und Mikrowellenbauelemente, wie z.B. Gebilde aus Leitungen (Doppelleitungen oder allgemeine Wellenleiter), Verzweigungsstücke, Richtkoppler, magisches T usw., die die zu Beginn genannten Bedingungen erfüllen.

Die Formulierung der Eigenschaften von n-Toren erfolgt entweder mit dem Impedanz-(Admittanz-)matrixformalismus (bzw. verwandter Matrixformen) oder mit Hilfe der umfassenderen Streumatrixtheorie, die in dieser Arbeit in ihrer allgemeinsten Form mit komplexen Bezugsimpedanzen angewendet wird. Je nach Art der Beschreibung ergibt sich eine besondere Darstellung des Transformationsverhaltens, aus dem man Möglichkeiten für Meß- und Berechnungsvorschriften der n-Tor Eigenschaften erhält.

Das Problem der n-Tor Analyse, d.h. der Bestimmung der Elemente einer Matrixdarstellung der n-Tor Eigenschaften, wird unter

dem Aspekt behandelt, daß in der experimentellen Praxis im allgemeinen nur Eingangsimpedanz- (Eingangsreflexionsfaktor-) messungen sehr genau durchführbar sind. Es wird gezeigt, wie sich Streumatrixelemente bis auf gewisse Mehrdeutigkeiten aus Eingangsreflexionsfaktoren berechnen lassen. Dabei wird ein neues Verfahren zur Untersuchung nichtreziproker n-Tore mit Hilfe reziproker Dreitore angegeben.

Wegen ihrer besonderen Bedeutung als nichtreziproke Bauelemente werden in der vorliegenden Arbeit passive, zyklisch symmetrische Zirkulatoren und aus ihnen besonders der Dreitorzirkulator untersucht. Zur Analyse realer Zirkulatoren werden neue Näherungslösungen berechnet. Größte Bedeutung für eine Herstellung von Zirkulatoren aus gewissen nichtreziproken Dreitoren haben die Verfahren der Synthese durch Anpassungszweitore und durch Bezugsimpedanzwechsel. Sie werden miteinander verglichen und im Hinblick auf eine Synthese mit realen, d.h. verlustbehafteten Bauelementen angewendet, woraus sich neue Gesichtspunkte für eine Dimensionierung der Anpassungszweitore ergeben.

Im experimentellen Teil der Arbeit wird nach einer kurzen Besprechung der technischen Hilfsmittel das Problem der Fortpflanzung von Meßfehlern bei der Berechnung von Streumatrixelementen aus Eingangsreflexionsfaktoren behandelt. Es stellt das Kriterium für die Anwendbarkeit der rechnerischen Analysemethoden dar. Die experimentellen Erfahrungen führen zu gewissen Mittelungsmethoden, die eine ausreichende Genauigkeit zumindest bei reziproken und 'stark' nichtreziproken n-Toren gewährleisten. Ziel der experimentellen Untersuchungen ist die Analyse eines nichtreziproken, zyklisch symmetrischen Dreitors (im Meterwellenbereich) im Hinblick auf eine Zirkulatorsynthese. In der Arbeit wird gezeigt, wie man allein durch Messung von Eingangsreflexionsfaktoren und Auswertung mit Hilfe der entwickelten Theorie Aussagen über mögliche Dimensionierungen von Anpassungszweitoren machen kann.

1. Erläuterungen zum Gegenstand der Untersuchungen

1.1. Klassifizierung linearer Eintore

Unter einem Eintor soll ein zeitunabhängiges physikalisches Gebilde verstanden werden, das einen 'elektrischen Anschluß', d.h. ein Klemmenpaar oder einen Wellenleiterquerschnitt besitzt. Zunächst beschränken sich die Betrachtungen auf Eintore, deren Anschluß aus zwei getrennten Klemmen besteht, also auf echte 'Zweipole'. Am Schluß dieses Abschnitts werden die Überlegungen auf Eintore mit einem Wellenleiteranschluß verallgemeinert.

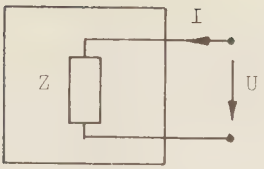
Beschreibt man das Eintor durch komplexe Klemmenspannung U und komplexen Klemmenstrom I, so ist es genau dann linear, wenn es eine Beziehung

$$c_1 U = c_2 + c_3 I \qquad (1)$$

mit gewissen komplexen Konstanten c_i (i=1,2,3) gibt. Ein Eintor mit U=I=0 wird nach [10] als 'Nullator' und ein Eintor mit beliebigen Werten von U und I als 'Norator' bezeichnet. Beide Fälle sollen in Zukunft ausgeschlossen werden. Ihre Bedeutung für die Netzwerktheorie wird in [10] erläutert.

Man unterteilt Eintore grundsätzlich in zwei Klassen, indem man unterscheidet, ob sie unabhängige Quellen elektrischer Energie besitzen oder nicht. Offenbar enthält ein Eintor, das durch (1) mit $c_2 \neq 0$ beschrieben wird, mindestens eine Energiequelle, da dann sowohl eine Leerlaufspannung U_0 für I = 0 als auch ein Kurzschlußstrom I_0 für U = 0 existieren. Es ist zweckmäßig, die Quellenfreiheit eines Eintors durch $c_2 = 0$ zu definieren. Daraus folgt, daß ein Eintor genau dann 'quellenbehaftet' ist, wenn $c_2 \neq 0$ gilt. Ein Eintor mit $c_2 = 0$ kann natürlich noch 'gesteuerte Quellen', also Impedanzen mit negativem Realteil enthalten.

Für die Beschreibung eines quellenfreien Eintors ist eine Kennzeichnung durch Bezugspfeile nach Abb. 1 üblich



(Abb. 1: Bezugspfeile beim quellenfreien Eintor)

Das Eintor ist durch seinen komplexen Widerstand

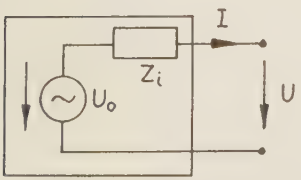
$$Z = U/I \tag{2}$$

charakterisiert, und der Realteil von Z beschreibt speziell das Wirkleistungsverhalten. Passivität liegt für $Re(Z) > 0$ (Aufnahme von Wirkleistung), Verlustlosigkeit ('Neutralität') für $Re(Z) = 0$ vor, aktives Verhalten bedeutet $Re(Z) < 0$ (Abgabe von Wirkleistung).

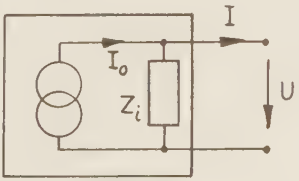
Ein Eintor mit $c_2 \neq 0$ enthält unabhängige Quellen elektrischer Energie und wird auch als Eintor- bzw. Zweipolquelle bezeichnet. Zweckmäßig wählt man nun eine andere Richtung des Bezugspfeils für den Klemmenstrom und beschreibt das Eintor durch eine Ersatzspannungsquelle nach Helmholtz [15] oder eine Ersatzstromquelle nach Mayer [19] mit Innenimpedanz Z_i. Der Abb. 2 entnimmt man

$$U = U_o - Z_i I \tag{3}$$

$$I = I_o - U/Z_i \tag{4}$$



Ersatzspannungsquelle mit Urspannung U_o



Ersatzstromquelle mit Urstrom I_o

(Abb. 2: Ersatzschaltbilder von Eintorquellen)

Die Wahl der Bezugspfeile bei quellenfreien und quellenbehafteten Eintoren wurde im Hinblick auf eine Zusammenschaltung getroffen, die man als Verbindung eines 'Verbrauchers' (quellenfreies Eintor) und eines 'Generators' (Eintorquelle) auffassen kann (vergleiche z.B. [6]).

Alle bisherigen Betrachtungen bleiben im HF- oder Mikrowellenbereich auch für Eintore mit Wellenleiteranschlüssen gültig, wenn man voraussetzt, daß eine geschlossene metallische Abschirmung vorhanden ist. Die Abb. 1 und 2 sind nur als Prinzipschaltbilder aufzufassen, und man muß berücksichtigen, daß Spannung und Strom Welleneigenschaften besitzen. Durch lineare Transformation sind die Strom- und Spannungsamplituden mit den Transversalkomponenten $\vec{E}_{tr}$, $\vec{H}_{tr}$ des elektrischen und magnetischen Feldes im Anschlußquerschnitt verknüpft, wobei eventuell verschiedene Wellentypen berücksichtigt werden müssen. Im Fall quellenfreier, passiver oder verlustloser Eintore kann man U und I direkt als Ersatzgrößen von $|\vec{E}_{tr}|$ und $|\vec{H}_{tr}|$ schreiben, wenn im Wellenleiterquerschnitt nur die Grundwelle vorhanden ist. Eine ausführliche Darstellung aller feldtheoretischen Probleme findet man z.B. in [33] .

1.2. Definition des quellenfreien, linearen n-Tors

In Analogie zum Eintor versteht man unter einem n-Tor ein zeitunabhängiges physikalisches Gebilde, das an n Stellen elektrische Anschlüsse, d.h. Klemmenpaare oder Wellenleiterquerschnitte besitzt. Im HF- und Mikrowellenbereich sei wieder vorausgesetzt, daß das gesamte Gebilde bis auf die Anschlußstellen metallisch abgeschirmt ist. Man bezeichnet die komplexen Torspannungen mit U_ν , die -ströme mit I_ν (ν =1...n) und bildet die Vektoren $\vec{U}$ und $\vec{I}$ mit den U_ν bzw. I_ν als Komponenten. Ein n-Tor heißt linear, wenn es eine Beziehung

$$\underline{C}_1\vec{U} + \underline{C}_2\vec{I} = \underline{K}\,(\underline{C}_3\vec{U} + \underline{C}_4\vec{I}) + \vec{k} \qquad (5)$$

mit n x n Matrizen $\underline{K}$ und $\underline{C}_i$ (i=1..4) gibt, deren Elemente

komplexe Konstanten sind, und einem Vektor $\vec{k}$ mit komplexen, konstanten Komponenten. Dabei sind die $\underline{C}_i$ Diagonalmatrizen, d.h. sie haben höchstens auf der Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente. In Zukunft werden alle Matrizen mit einem Querstrich unter dem jeweiligen Buchstaben gekennzeichnet, das Symbol $\underline{1}$ stellt die Einheitsmatrix, das Symbol $\underline{0}$ die Nullmatrix dar.

Die Matrix $\underline{K}$ verknüpft die Vektoren $(\underline{C}_1\vec{U} + \underline{C}_2\vec{I})$ und $(\underline{C}_3\vec{U} + \underline{C}_4\vec{I})$, die verallgemeinerte Torvariable darstellen. Gl. (5) beschreibt daher eine lineare Transformation in einem n-dimensionalen Vektorraum. Singuläres Verhalten an einzelnen Toren, d.h. U = I = 0 oder U, I beliebig sei stets ausgeschlossen. Allgemeinere Darstellungen von Netzwerkeigenschaften, die mit (5) nicht zu beschreiben sind, findet man in [10] .

Der Begriff der Quellenfreiheit, d.h. Fehlen unabhängiger Quellen, wird ähnlich wie bei Eintoren eingeführt, indem man die einzelnen Tore auf Kurzschlußströme und Leerlaufspannungen untersucht. Ein n-Tor heißt quellenfrei, wenn bei Leerlauf aller Tore keine Leerlaufspannungen oder bei Kurzschluß aller Tore keine Kurzschlußströme auftreten. Anders ausgedrückt bedeutet das, daß in (5) aus $\vec{I} \equiv 0$ auch $\vec{U} \equiv 0$ folgen muß oder umgekehrt. Damit erhält man aus (5) die notwendige Bedingung $\vec{k} = 0$ und es muß gelten

$$\underline{C}_1\vec{U} + \underline{C}_2\vec{I} = \underline{K}\,(\underline{C}_3\vec{U} + \underline{C}_4\vec{I}) \qquad (6)$$

Umgekehrt ist (6) hinreichend, wenn die Zusatzbedingungen

$$\det(\underline{C}_1 - \underline{K}\,\underline{C}_3) \neq 0\,, \quad \det(\underline{C}_2 - \underline{K}\,\underline{C}_4) \neq 0 \qquad (7)$$

erfüllt sind, wobei 'det' als Abkürzung für Determinante steht.

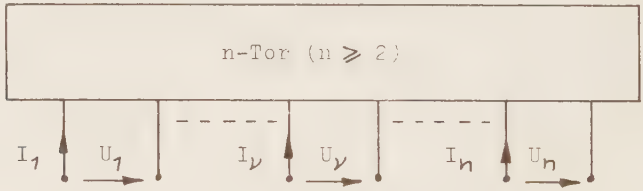
Die bisherigen Betrachtungen und insbesondere Gl. (6) gelten auch für HF- und Mikrowellen-n-Tore, wenn man Spannungen und Ströme wieder als Ersatzgrößen des elektrischen und magnetischen Transversalfeldes in den Anschlußquerschnitten der Wellenleiter auffaßt und eventuell noch verschiedene Wellentypen

berücksichtigt (siehe [33]).

Unter einem 'n-Tor' soll in Zukunft immer ein lineares und quellenfreies verstanden werden. Für n=1 sind unter Umständen Eintorquellen zugelassen, was jeweils besonders vermerkt wird. Für $n \geqslant 2$ wird darüberhinaus meistens Passivität oder Verlustlosigkeit der betrachteten Bauelemente vorausgesetzt, Bedingungen hierfür sind in 3.4. angegeben.

1.3. Zusammenschalten von n-Toren

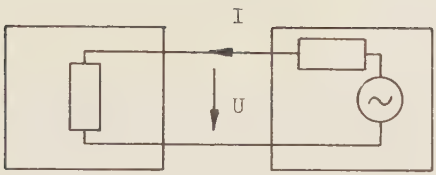
Man betrachtet zunächst n-Tore, deren Anschlüsse aus Klemmenpaaren bestehen. Die Bezugspfeile für Torspannungen und -ströme sollen in Zukunft wie in Abb. 3 gewählt sein, die eine Verallgemeinerung von Abb. 1 bedeutet.



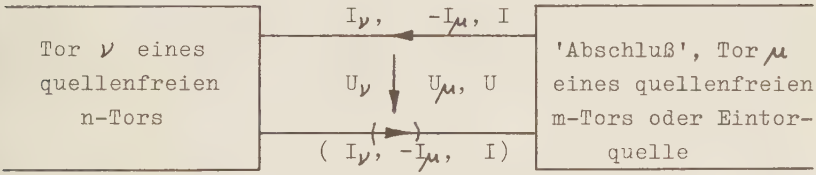
(Abb. 3: Wahl der Bezugspfeile beim quellenfreien, linearen n-Tor ($n \geqslant 2$))

Eine einfache Zusammenschaltung erhält man durch Verbinden einer Eintorquelle mit einem quellenfreien Eintor mit Hilfe verlustlos gedachter Drähte. Sie ist in Abb. 4 dargestellt, die sich zwanglos aus den Abb. 1 und 2 ergibt.

Nun betrachtet man die Verbindung zweier zunächst beliebiger Klemmenpaare in Abb. 5., wobei jedoch die 'Erfüllung der Paarbilanz' (zu- und abfließender Klemmenstrom gleich groß, was durch idealen Übertrager erzwungen werden kann) gefordert werden muß, damit eine Verallgemeinerung auf Wellenleiteranschlüsse möglich ist. Im Prinzip soll keines der beiden Tore vor dem



(Abb. 4: Verbinden einer Eintorquelle mit einem quellenfreien Eintor)



(Abb. 5: Allgemeine Verbindung zweier Klemmenpaare, bei der zu- und abfließender Strom gleich sind)

anderen ausgezeichnet sein, und es ist daher willkürlich, die Bezugspfeile in Analogie zu Abb. 4 festzulegen. Zweckmäßig erweist sich diese Festsetzung für eine spätere Beschreibung des Transformationsverhaltens von n-Toren. In Zukunft soll das Klemmenpaar mit einer Pfeilsetzung gemäß Abb. 2 als 'Abschluß' des Klemmenpaares mit einer Pfeilsetzung nach Abb. 1 aufgefaßt werden, letzteres muß zu einem quellenfreien n-Tor gehören. Der Abschluß besteht entweder aus einer Eintorquelle oder aus dem Tor μ eines quellenfreien m-Tors, bei dem die Bezugsrichtung des Stroms I_μ umgekehrt wird. Abb. 4 zeigt den Fall, daß ein quellenfreies Eintor mit einer Eintorquelle abgeschlossen ist. Genauere Überlegungen zu Abb. 5 werden in Abschnitt 3.6. durchgeführt, wo auch der Fall der Zusammenschaltung zweier Eintorquellen berücksichtigt wird.

Unberücksichtigt bleiben Zusammenschaltungen, bei denen die einzelnen Klemmen eines Tores mit zwei verschiedenen Toren verbunden oder zwei Klemmen verschiedener Tore als neues Tor aufgefaßt werden. Diese netzwerktheoretischen Möglichkeiten lassen sich nicht auf die Zusammenschaltung von Wellenleiteran-

schlüssen verallgemeinern und sind daher nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Zur Verbindung von Toren sollen verlustlose 'Leitungen' benutzt werden. Je nach Frequenzbereich sind darunter Drähte, Doppelleitungen, Hohlleiter oder allgemeinere Wellenleiter zu verstehen, die sowohl Ströme als auch Spannungen bzw. elektrische und magnetische Felder höchstens in der Phase, nicht aber dem Betrage nach transformieren. Verluste in realen Leitungen kann man dadurch berücksichtigen, daß die Leitungen selbst durch eine Schaltung aus einem verlustbehafteten Zweitor mit eventuell vor- und nachgeschalteten, verlustlos gedachten Leitungsstükken ersetzt werden.

Bei der Betrachtung von Doppelleitungen im Meter- und Dezimeterwellenbereich und besonders bei Hohlleitern im Mikrowellenbereich wird deutlich, daß die Leitungen beim Zusammenschalten von n-Toren auf die zu verbindenden Tore 'passen' müssen, d.h. die Tore müssen Anschlüsse gleicher Art darstellen. Nur so ist eine stoßfreie Verbindung durch eine homogene Leitung möglich. Für koaxiale Doppelleitungen z.B. bedeutet das, daß der Leitungsquerschnitt und die Querschnitte der anzuschließenden Tore übereinstimmen müssen. Andernfalls muß die Sprungstelle zwischen zwei verschiedenen Leitungsquerschnitten als neues Zweitor gesondert betrachtet werden. Bei Hohlleitern ergibt sich noch die zusätzliche Schwierigkeit, daß trotz homogener Leitung und stoßfreier Verbindung mit den Toren eventuell mehrere Wellentypen ausbreitungsfähig sind. Es muß bei der Zusammenschaltung sichergestellt sein, daß nur 'vorgesehene' Wellentypen auftreten. In der Praxis ist meist nur der Fall eines Hohlleiters mit einer einzigen zur Fortpflanzung fähigen Hauptwelle interessant. Wählt man die Leitung genügend lang, so werden unerwünschte Wellentypen stark gedämpft und können vernachlässigt werden.

Zusammenfassend lassen sich folgende Bedingungen aufstellen, die bei der Verbindung zweier Tore von HF- bzw. Mikrowellen-n-Toren durch einen verlustlosen homogenen Wellenleiter erfüllt sein müssen (vergleiche z.B. [1])

.) Die Geometrien der Anschlüsse müssen übereinstimmen.

.) Die 'vorgesehenen' Wellentypen (d.h. die Hauptwellen) an den Anschlüssen müssen übereinstimmen.

.) Nach Verbinden der Tore durch eine homogene Leitung dürfen nur die vorgesehenen Wellentypen auftreten.

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, muß die Verbindung der Tore über ein zwischengeschaltetes Zweitor erfolgen, das die Transformation der Leitergeometrie oder eines Wellentyps beschreibt. In Zukunft sei vorausgesetzt, daß im Prinzipschaltbild der Verbindung zweier Tore (Abb. 5) die genannten Bedingungen erfüllt sind. Falls die Leitung keine transformierenden Eigenschaften besitzt, gilt in Abb. 5 $I_\nu = -I_\mu$, $U_\nu = U_\mu$ oder $I_\nu = I$, $U_\nu = U$, und man braucht n-Tore mit Klemmenpaaren als Anschlüssen (bei denen zu- und abfließender Strom gleich sind!) und solche mit Wellenleiteranschlüssen nicht mehr prinzipiell getrennt zu behandeln.

2. Impedanz- (Admittanz-) matrixtheorie

2.1. Beschreibung von n-Toren durch eine Impedanz- bzw. Admittanzmatrix und verwandte Matrixformen

Die Eigenschaften eines n-Tors werden durch die Matrizen $\underline{C}$ und $\underline{K}$ in (6) charakterisiert. Aus der Mannigfaltigkeit der Beschreibungsmöglichkeiten seien zunächst die Fälle $\underline{C}_2 = \underline{C}_3 = \underline{0}$, $\underline{C}_1 = \underline{C}_4 = \underline{1}$ und $\underline{C}_2 = \underline{C}_3 = \underline{1}$, $\underline{C}_1 = \underline{C}_4 = \underline{0}$ herausgegriffen. Aus (6) erhält man damit Definitionsgleichungen für die (Leerlauf-) Impedanzmatrix $\underline{W}$ und die (Kurzschluß-) Admittanzmatrix $\underline{L}$

$$\vec{U} = \underline{W}\ \vec{I} \qquad (8)$$

$$\vec{I} = \underline{L}\ \vec{U} \qquad (9)$$

Sofern die inversen Matrizen existieren, gilt

$$\underline{W} = \underline{L}^{-1} , \quad \underline{L} = \underline{W}^{-1} \tag{10}$$

Ist $\underline{L}$ oder $\underline{W}$ singulär, dann gibt es höchstens eine der Möglichkeiten (8) und (9) zur Charakterisierung der n-Tor Eigenschaften. Die Vermutung jedoch, daß ein n-Tor stets entweder eine Impedanz- oder eine Admittanzmatrix besitzt, erweist sich schon an Hand einfacher Beispiele als falsch. An dieser Stelle sei nur der ideale Transformator als Zweitor ohne Impedanz- und Admittanzmatrix erwähnt. Er hat die Eigenschaften

$$U_1/U_2 = \ddot{u} , \quad I_1/I_2 = -1/\ddot{u} \tag{11}$$

wobei ü das Spannungsübersetzungsverhältnis bedeutet. Zwischen U_1 , U_2 , I_1 und I_2 besteht kein linearer Zusammenhang der Form (8) oder (9), d.h. es gibt weder eine Impedanz- noch eine Admittanzmatrix. Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit gibt es speziell bei Zweitoren durch die Kettenmatrixdarstellung, die sich jedoch nicht auf n-Tore mit $n > 2$ verallgemeinern läßt.

Abgesehen vom Problem der Existenz von $\underline{W}$ oder $\underline{L}$ ergibt sich die Schwierigkeit, daß das Verhalten eines n-Tors in einer praktischen Schaltung nicht ohne weiteres aus $\underline{W}$ bzw. $\underline{L}$ ersichtlich ist. Nur selten sind entweder alle Torspannungen oder alle Torströme bekannt, so daß die jeweils unbekannten Größen mit $\underline{W}$ oder $\underline{L}$ berechnet werden können. Oft ist an jedem Tor eine der beiden Größen U und I vorgegeben, insgesamt seien r Torspannungen und (n-r) Torströme bekannt. Sie bilden in der Reihenfolge der Tornummern einen Vektor, der sich durch Ordnen nach Strom- und Spannungskomponenten in die folgende Gestalt bringen läßt

$$(U_{\nu_1} \dots U_{\nu_r} I_{\nu_{r+1}} \dots I_{\nu_n})^T \tag{12}$$

Das hochgestellte T bedeutet 'transponiert', (12) ist also ein Spaltenvektor. Die Indizes $\nu_1 \dots \nu_n$ stellen eine Permutation der natürlichen Zahlen 1...n, also der Tornummern dar. Der zugehörige Vektor der unbekannten Torvariablen lautet

$$(I_{\nu_1} \ \dots \ I_{\nu_r} \ U_{\nu_{r+1}} \ \dots \ U_{\nu_n})^T \qquad (13)$$

Um (12) und (13) mit (6), (8) und (9) verknüpfen zu können, permutiert man in (6), (8) und (9) die Zeilen und Spalten der Gleichungssysteme derart, daß Torspannungs- und -stromvektoren lauten

$$\vec{U} = (U_{\nu_1} \ \dots \ U_{\nu_n})^T \quad \vec{I} = (I_{\nu_1} \ \dots \ I_{\nu_n})^T \qquad (14)$$

und setzt nun der Einfachheit halber eine neue Tornumerierung fest, nämlich $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, ..., $\nu_n = n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die in (6), (8) und (9) auftretenden Matrizen schon in der geeignet permutierten Form vorliegen. Nun identifiziert man (12) mit dem Vektor $(\underline{C}_3\vec{U} + \underline{C}_4\vec{I})$ und (13) mit dem Vektor $(\underline{C}_1\vec{U} + \underline{C}_2\vec{I})$ in (6), d.h. man setzt die ersten r Diagonalelemente von $\underline{C}_2$ und $\underline{C}_3$ gleich 1 und die von $\underline{C}_1$ und $\underline{C}_4$ gleich 0, während die übrigen (n-r) Diagonalelemente von $\underline{C}_2$ und $\underline{C}_3$ gleich Null und die von $\underline{C}_1$ und $\underline{C}_4$ gleich 1 sind. (6) lautet nun in vereinfachter Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \vec{I}^{\,I} \\ \vec{U}^{\,II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{K}^{(1)} & \underline{K}^{(2)} \\ \underline{K}^{(3)} & \underline{K}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{\,I} \\ \vec{I}^{\,II} \end{pmatrix} \quad \underline{K} = \begin{pmatrix} \underline{K}^{(1)} & \underline{K}^{(2)} \\ \underline{K}^{(3)} & \underline{K}^{(4)} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

$\vec{U}^{\,I} = (U_1 \ \dots U_r)^T \ \vec{I}^{\,I} = (I_1 \ \dots I_r)^T \ \vec{U}^{\,II} = (U_{r+1} \dots U_n)^T \ \vec{I}^{\,II} = (I_{r+1} \dots I_n)^T$

Nach dem gleichen Schema schreibt man Gl. (8) um

$$\begin{pmatrix} \vec{U}^{\,I} \\ \vec{U}^{\,II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{W}^{(1)} & \underline{W}^{(2)} \\ \underline{W}^{(3)} & \underline{W}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{I}^{\,I} \\ \vec{I}^{\,II} \end{pmatrix} \quad \underline{W} = \begin{pmatrix} \underline{W}^{(1)} & \underline{W}^{(2)} \\ \underline{W}^{(3)} & \underline{W}^{(4)} \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Existiert $(\underline{W}^{(1)})^{-1}$, dann läßt sich (16) umformen zu

$$\begin{pmatrix} \vec{I}^{\,I} \\ \vec{U}^{\,II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{W}^{(1)})^{-1} & -(\underline{W}^{(1)})^{-1}\underline{W}^{(2)} \\ \underline{W}^{(3)}(\underline{W}^{(1)})^{-1} & \underline{W}^{(4)} - \underline{W}^{(3)}(\underline{W}^{(1)})^{-1}\underline{W}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{\,I} \\ \vec{I}^{\,II} \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Koeffizientenvergleich mit (15) liefert die unbekannten Untermatrizen von $\underline{K}$ als Funktionen der Untermatrizen von $\underline{W}$, womit eine Umordnung von (8) erreicht ist. Bei $\det(\underline{W}^{(1)}) = 0$ wird man

statt (16) eine aus (9) analog gebildete Matrizengleichung betrachten und prüfen, ob $\det(\underline{L}^{(4)}) \neq 0$ wird. Ist das der Fall, so erhält man statt (17)

$$\begin{pmatrix} \vec{I}^{\,I} \\ \vec{U}^{\,II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{L}^{(1)} - \underline{L}^{(2)}(\underline{L}^{(4)})^{-1}\underline{L}^{(3)} & \underline{L}^{(2)}(\underline{L}^{(4)})^{-1} \\ -(\underline{L}^{(4)})^{-1}\underline{L}^{(3)} & (\underline{L}^{(4)})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{\,I} \\ \vec{I}^{\,II} \end{pmatrix} \quad (18)$$

und $\underline{K}^{(1)} \ldots \underline{K}^{(4)}$ damit als Funktionen der Untermatrizen von $\underline{L}$. Speziell für n = 2 kann man die besprochenen Umordnungsprozeduren elegant im Rahmen von vierdimensionalen kanonischen Transformationen durchführen (siehe [3]).

Matrizen $\underline{K}$ in (15) sind dann von besonderer Bedeutung, wenn weder $\underline{W}$ noch $\underline{L}$ existieren. In [38] wird gezeigt, daß passive lineare n-Tore stets mindestens eine Matrix der Art (15) besitzen, die eine Beschreibung der Eigenschaften des Bauelements erlaubt.

2.2. Transformationseigenschaften von n-Toren

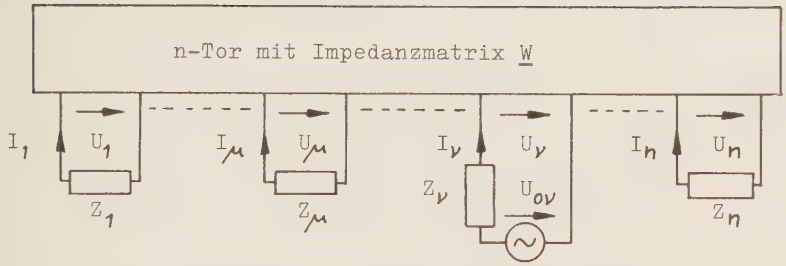
2.2.1. Strom- und Spannungstransformation

Man betrachtet ein n-Tor, dessen Tor ν durch einen Generator mit Urspannung $U_{0\nu}$ und Innenimpedanz Z_ν und dessen übrige Tore durch quellenfreie Eintore mit den Impedanzen Z_κ ($\kappa = 1..n$, $\kappa \neq \nu$) abgeschlossen sind (Abb. 6). Diese Schaltungskonfiguration ist besonders wichtig, da sie eine verallgemeinerte Form der Verbindung eines Generators mit verschiedenen Verbrauchern darstellt, wobei die Übertragungseigenschaften durch das n-Tor charakterisiert werden. Aus Abb. 6 entnimmt man

$$U_\nu = U_{0\nu} - Z_\nu I_\nu \qquad 1 \leq \nu \leq n \qquad (19)$$

$$U_\kappa = -Z_\kappa I_\kappa \qquad \kappa = 1...n,\ \kappa \neq \nu \qquad (20)$$

Unter der Voraussetzung, daß das betrachtete n-Tor eine Impedanzmatrix $\underline{W}$ besitzt, erhält man aus (8) mit (19) und (20)



(Abb. 6: Schaltung eines n-Tors zur Darstellung von Transformationen)

$$
\begin{aligned}
0 &= (W_{11}+Z_1)I_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +W_{1n}I_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
U_{0\nu} &= W_{\nu 1}I_1 + \ldots+(W_{\nu\nu}+Z_\nu)I_\nu +\ldots\ldots\ldots+W_{\nu n}I_n \qquad (21) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= W_{n1}I_1 +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(W_{nn}+Z_n)I_n
\end{aligned}
$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, daß kein Tor leerläuft. Nimmt man nämlich an, daß für ein gewisses μ mit $\mu \neq \nu$ $Z_\mu = \infty$ wird, so verschwindet I_μ. Nun kann man die Betrachtungen auf ein (n-1)-Tor beschränken, das aus dem n-Tor durch Außerachtlassen des leerlaufenden Tores μ entsteht und für das nun die Voraussetzung gilt.

Mit Hilfe der Cramer'schen Regel (siehe z.B. [31]) berechnet man aus dem System (21) die Torströme als Funktion der Urspannung $U_{0\nu}$, der Matrixelemente $W_{\kappa\mu}$ und der Impedanzen Z_κ

$$I_\mu = (-1)^{\nu+\mu} U_{0\nu} \Delta_{W\nu\mu} / \Delta_W \qquad \mu = 1\ldots n \qquad (22)$$

Die Determinante Δ_W ist definiert durch

$$\Delta_W = \det(\underline{W} + \underline{Z}) \qquad (23)$$

mit der Diagonalmatrix $\underline{Z}$, deren Hauptdiagonalelemente die Z_ν (ν =1...n) sind. Aus Δ_W erhält man $\Delta_{W\nu\mu}$, indem man die μ-te Spalte und ν-te Zeile streicht. Mit Hilfe von (19)

(20) und (22) findet man die Spannungstransformationsformeln

$$U_\nu/U_{o\nu} = 1 - Z_\nu \Delta_{w\nu\nu} / \Delta_w \tag{24}$$

$$U_\mu/U_{o\nu} = (-1)^{\nu+\mu-1} Z_\mu \Delta_{w\nu\mu}/\Delta_w \tag{25}$$

$$U_\mu/U_\nu = (-1)^{\nu+\mu-1} Z_\mu \Delta_{w\nu\mu}/(\Delta_w - Z_\nu \Delta_{w\nu\nu}) \tag{26}$$

Entsprechende Stromtransformationsformeln erhält man, wenn man den Generator am Tor ν durch eine Ersatzstromquelle mit Urstrom $I_{o\nu}$ beschreibt. Statt (19) gilt nun

$$I_\nu = I_{o\nu} - U_\nu/Z_\nu \tag{27}$$

$$U_{o\nu} = Z_\nu I_{o\nu} \tag{28}$$

In Analogie zu (24) - (26) berechnet man aus (22)

$$I_\nu/I_{o\nu} = Z_\nu \Delta_{w\nu\nu}/\Delta_w \tag{29}$$

$$I_\mu/I_{o\nu} = (-1)^{\nu+\mu} Z_\nu \Delta_{w\nu\mu}/\Delta_w \tag{30}$$

$$I_\mu/I_\nu = (-1)^{\nu+\mu} \Delta_{w\nu\mu}/\Delta_{w\nu\nu} \tag{31}$$

Statt die Transformationen mit Hilfe der Impedanzmatrix durchzuführen, kann man auch mit der Admittanzmatrix arbeiten. Dazu charakterisiert man die Abschlüsse des n-Tors in (20) durch ihre Admittanzen $Y_\varkappa = 1/Z_\varkappa$ und speziell den Generator am Tor ν durch (27), wobei für $1/Z_\nu$ der innere Leitwert Y_ν gesetzt wird. Zusammen mit (9) erhält man statt (21)

$$\begin{aligned}
0 &= (L_{11}+Y_1)U_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + L_{1n}U_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
I_{o\nu} &= L_{\nu 1}U_1 + \ldots + (L_{\nu\nu}+Y_\nu)U_\nu + \ldots\ldots\ldots + L_{\nu n}U_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= L_{n1}U_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (L_{nn}+Y_n)U_n
\end{aligned} \tag{32}$$

Der Fall $Y_{\varkappa} = \infty$, d.h. Kurzschluß am Tor $\varkappa$, kann ausgeschlossen werden, da sich dann das System (32) wegen $U_{\varkappa} = 0$ auf ein System reduzieren läßt, für das $Y_{\varkappa} \neq \infty$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann also von vornherein $Y_{\varkappa} \neq \infty$ angenommen werden. Mit der Cramer'schen Regel erhält man

$$U_{\mu} = (-1)^{\nu+\mu} I_{0\nu} \Delta_{L\nu\mu} / \Delta_L \qquad \mu = 1 \ldots n \tag{33}$$

Die Determinanten Δ_L und $\Delta_{L\nu\mu}$ werden analog zu den in (22) auftretenden mit Hilfe von $\underline{L}$ gebildet. Zum Schluß seien noch die aus (33) berechenbaren Transformationsformeln angegeben

$$U_{\nu}/U_{0\nu} = Y_{\nu} \Delta_{L\nu\nu} / \Delta_L \tag{34}$$

$$U_{\mu}/U_{0\nu} = (-1)^{\nu+\mu} Y_{\nu} \Delta_{L\nu\mu} / \Delta_L \tag{35}$$

$$U_{\mu}/U_{\nu} = (-1)^{\nu+\mu} \Delta_{L\nu\mu} / \Delta_{L\nu\nu} \tag{36}$$

$$I_{\nu}/I_{0\nu} = 1 - Y_{\nu} \Delta_{L\nu\nu} / \Delta_L \tag{37}$$

$$I_{\mu}/I_{0\nu} = (-1)^{\nu+\mu-1} Y_{\mu} \Delta_{L\nu\mu} / \Delta_L \tag{38}$$

$$I_{\mu}/I_{\nu} = (-1)^{\nu+\mu-1} Y_{\mu} \Delta_{L\nu\mu} / (\Delta_L - Y_{\nu} \Delta_{L\nu\nu}) \tag{39}$$

Die relativ einfache Gestalt von (29) - (31) und (34) - (36) zeigt, daß die Impedanzmatrix sich besonders gut zur Beschreibung der Transformation von Torströmen eignet, während die Admittanzmatrix eine einfache Darstellung einer Spannungstransformation gestattet.

2.2.2. Impedanz- und Admittanztransformation

Wie im vorigen Abschnitt geht man von Abb. 6 aus und fragt nun danach, wie sich die Abschlußimpedanzen Z_μ oder -admittanzen Y_μ ($\mu = 1 \ldots n, \mu \neq \nu$) in die Eingangsimpedanz $Z_{\nu E}$ oder die Eingangsadmittanz $Y_{\nu E}$ transformieren. Nach Abb. 6 gilt

$$Z_{\nu E} = U_\nu / I_\nu \qquad Y_{\nu E} = I_\nu / U_\nu \tag{40}$$

Einsetzen von (24) und (29) bzw. von (34) und (37) führt zu

$$Z_{\nu E} = \Delta_W / \Delta_{W\nu\nu} - Z_\nu \tag{41}$$

$$Y_{\nu E} = \Delta_L / \Delta_{L\nu\nu} - Y_\nu \tag{42}$$

woraus man durch Entwickeln von $\Delta_{W,L}$ nach der ν-ten Zeile

$$Z_{\nu E} = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\nu+\mu} W_{\nu\mu} \Delta_{W\nu\mu} / \Delta_{W\nu\nu} \tag{43}$$

$$Y_{\nu E} = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\nu+\mu} L_{\nu\mu} \Delta_{L\nu\mu} / \Delta_{L\nu\nu} \tag{44}$$

erhält. Anschauliche Bedeutung gewinnen diese Ergebnisse, wenn man berücksichtigt, daß die Impedanztransformation aus einer Stromtransformation und die Admittanztransformation aus einer Spannungstransformation hervorgegangen ist. In den einzelnen Summanden von (43) und (44) sind nämlich (31) bzw. (36) enthalten, so daß man schreiben kann

$$Z_{\nu E} = \sum_{\mu=1}^{n} W_{\nu\mu} I_\mu / I_\nu \tag{45}$$

$$Y_{\nu E} = \sum_{\mu=1}^{n} L_{\nu\mu} U_\mu / U_\nu \tag{46}$$

Die Gleichungen ergeben sich auch direkt aus den ν-ten Zeilen der Systeme (8) und (9), wenn man durch I_ν bzw. U_ν dividiert.

Die explizite Berechnung der in diesem und im vorigen Abschnitt auftretenden Determinanten ist die eigentliche Schwierigkeit bei allen Transformationsproblemen. Elektronische Rechenmaschi-

nen und topologische Hilfsmittel erleichtern die Arbeit. Zu letzteren gehören die von Mason entwickelten 'Signalflußdiagramme' ([20], [21]), deren Theorie von Coates [14] weiterentwickelt wurde. Einen zusammenfassenden Überblick über topologische Hilfsmittel zum Lösen linearer Gleichungssysteme im Zusammenhang mit n-Toren gibt die Arbeit [13].

.2.3. Schwierigkeiten bei der Beschreibung des Leistungsübertragungsverhaltens

Das Aufstellen einer speziellen Leistungsbilanz an einem n-Tor mit Hilfe der Impedanzmatrix ist umständlich, was ein Beispiel verdeutlichen soll. Man betrachtet die allgemeine Transformationsschaltung Abb. 6, in der der Impedanzmatrixformalismus verwendet wird, Überlegungen im Admittanzmatrixformalismus verlaufen dual. Gesucht seien die vom n-Tor am Tor ν aufgenommene und die zum Tor μ an den dortigen komplexen 'Verbraucher' Z_μ transportierte Wirkleistung. Vom Generator kann dem n-Tor maximal die Wirkleistung

$$P_{max} = |U_{0\nu}|^2/8\ \mathrm{Re}(Z_\nu) \tag{47}$$

zugeführt werden. Tatsächlich nimmt Tor ν nur die Leistung

$$P_\nu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(Z_{\nu E})\,|I_\nu|^2 = \mathrm{Re}(Z_{\nu E})\,|U_{0\nu}|^2/2\,|Z_{\nu E} + Z_\nu|^2 \tag{48}$$

auf. Bei aktiven n-Toren kann P_ν negativ werden, was eine Abgabe von Leistung bedeutet. Die Eingangsimpedanz $Z_{\nu E}$ ist eine Funktion von $\underline{W}$ und Z_μ ($\mu = 1 \ldots n,\ \mu \neq \nu$) und wird durch (43) explizit dargestellt. Einsetzen in (48) ergibt

$$P_\nu = \frac{\mathrm{Re}\left[\sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\nu+\mu} W_{\nu\mu} \Delta_{W\nu\mu}/\Delta_{W\nu\nu}\right] |U_{0\nu}|^2}{2\left| Z_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\nu+\mu} W_{\nu\mu} \Delta_{W\nu\mu}/\Delta_{W\nu\nu}\right|^2} \tag{49}$$

Dem Verbraucher Z_μ wird die Leistung

$$P_\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(Z_\mu)\,|I_\mu|^2 \tag{50}$$

zugeführt. Mit Hilfe der Stromtransformationsformel (31) erhält man

$$P_\mu = \frac{\mathrm{Re}(Z_\mu)\,|U_{0\nu}|^2 |\Delta_{\nu\mu}|^2}{2|Z_{\nu E} + Z_\nu|^2 |\Delta_{\nu\nu}|^2} \tag{51}$$

(49) und (51) gelten im allgemeinen Betriebsfall, d.h. für jeden Satz von Abschlüssen, wie er in Abb. 6 dargestellt ist. Hieraus wird deutlich, wie kompliziert die Berechnung der vom n-Tor aufgenommenen und übertragenen Leistung aus Impedanzmatrixelementen ist. Abgesehen vom Problem der Determinantenberechnung werden die Ausdrücke (49) und (51) durch Realteil- und Betragsbildungen sehr umständlich. Diese Bemerkungen gelten schon für den Fall n = 2.

Ursache der Schwierigkeiten ist die Beschreibung des n-Tors durch eine Matrix, die die zur Gesamtschaltung gehörigen äußeren Abschlüsse nicht berücksichtigt. Erst die Abschlüsse geben aber die wesentliche Information über die Leistungsbilanz wie auch schon vorher über andere Transformationseigenschaften.

Die für Zweitore entwickelte 'Betriebsparametertheorie' (siehe z.B. [12]) und die Darstellung fortschreitender Wellen im hochfrequenten Bereich bilden die Ausgangspunkte für eine übersichtlichere Beschreibung des Leistungsaufnahme- und -übertragungsverhaltens von n-Toren mit Hilfe einer 'Streumatrix'. Die Betriebsparametertheorie enthält als wesentlichen Teil die Berücksichtigung der Abschlußelemente eines Zweitors, während der Formalismus zur Wellenbeschreibung eine einfache und anschauliche Möglichkeit liefert, über das Leistungsübertragungsverhalten Aufschluß zu bekommen.

3. Streumatrixtheorie

3.1. Transformation von Strömen und Spannungen in 'Leistungswellen'

Die Beschreibung von n-Toren durch Torspannungen und -ströme ist insbesondere im Mikrowellenbereich nicht mehr sinnvoll, da nur noch Wellengrößen einer Messung direkt zugänglich sind und die n-Tor Zuleitungen eventuell nicht mehr aus Doppelleitungen, sondern aus allgemeinen Wellenleitern bestehen. Für n-Tore, deren Abmessungen mit der Wellenlänge von Strom bzw. Spannung vergleichbar sind, wird man also zweckmäßig zu Ersatzgrößen übergehen, die dem Wellencharakter der zu- und abgeführten Leistungen Rechnung tragen. Im folgenden zeigt sich, daß die aus Torspannungen und -strömen durch lineare Transformation gewonnenen Ersatzgrößen auch bei niederfrequenten n-Toren zweckmäßig verwendet werden, um das Leistungsübertragungsverhalten einfach zu beschreiben. Die neuen Torvariablen (definiert durch eine lineare Verknüpfung des Typs (6)) sind nämlich so gewählt, daß sie gerade Leistungsamplituden darstellen.

In äußerer Analogie zu fortschreitenden Wellen auf Leitungen definiert man 'Wellen' auf den Zuleitungen eines n-Tors. Am Tor ν existieren eine 'einlaufende Welle' a_ν und eine 'reflektierte Welle' b_ν, die man als geeignete Linearkombinationen von Strom und Spannung ansetzt

$$a_\nu = (U_\nu + Z_\nu I_\nu)/2\sqrt{2\mathrm{Re}(Z_\nu)} \qquad b_\nu = (U_\nu - Z_\nu^* I_\nu)/2\sqrt{2\mathrm{Re}(Z_\nu)} \quad (52)$$

Diese formalen 'Wellen' sind neue Torvariable im Sinne der allgemeinen Linearitätsbeziehung (6). Die zu (52) inverse Transformation lautet

$$U_\nu = \sqrt{2}\,(a_\nu Z_\nu^* + b_\nu Z_\nu)/\sqrt{\mathrm{Re}(Z_\nu)} \qquad I_\nu = \sqrt{2}\,(a_\nu - b_\nu)/\sqrt{\mathrm{Re}(Z_\nu)} \quad (53)$$

In (52) und (53) ist Z_ν eine zunächst willkürliche, aber fest gewählte Bezugsimpedanz mit $\mathrm{Re}(Z_\nu) > 0$. Sie entspricht für reelles Z_ν dem Feldwellenwiderstand einer verlustlosen Leitung,

bei der man zur Beschreibung einer Wellenfortpflanzung ähnliche Wellen definieren kann (siehe z.B. [33]).

Die physikalische Bedeutung der a_ν und b_ν läßt sich einfach erklären. Dazu berechnet man die vom Tor ν aufgenommene Leistung

$$P_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(U_\nu I_\nu^*) = |a_\nu|^2 - |b_\nu|^2 \qquad (54)$$

Die Wellen a_ν und b_ν sind also durch die Definition (52) so normiert, daß ihre Betragsquadrate die am Tor ν 'einfallende' bzw. 'reflektierte' Leistung darstellen, und sie selbst Leistungsamplituden sind. Das Verhalten der deshalb mit 'Leistungswellen' bezeichneten Größen a_ν, b_ν ist von der Bezugsimpedanz abhängig, betrifft jedoch nicht die Gesamtbilanz P_ν. Der Begriff der 'Bezugs'-impedanz läßt sich sehr anschaulich an dem in 2.2.3. gezeigten Beispiel erklären. Man betrachtet das mit dem Generator verbundene Tor ν und P_{max} in (47). Nach (52) stellt $|a_\nu|^2$ gerade P_{max} dar, wenn man als Bezugsimpedanz Z_ν die Innenimpedanz des Generators wählt. $|b_\nu|^2$ gibt dann nach (54) den Teil der Leistung an, der durch Fehlanpassung dem Tor ν nicht zugeführt werden kann. Diese Ausdrucksweise ist natürlich nur bei passiven n-Toren sinnvoll, da bei aktiven $|b_\nu|^2$ größer als $|a_\nu|^2$ sein kann. Die Fehlanpassung verschwindet nach (48), (52) und (54), wenn die Eingangsimpedanz $Z_{\nu E}$ gleich der konjugiert komplexen Innenimpedanz des Generators ist. Nachträglich ist damit die Definition (52) vollständig plausibel.

Zum Schluß muß noch auf die Bedeutung der Wahl einer komplexen Bezugsimpedanz für die Leistungswellen eingegangen werden, da eine engere Definition von Wellen mit ausschließlich reellen Bezugsimpedanzen lange Zeit gebräuchlich war (siehe z.B. [9], [25], [36]). Sie war speziell im Hinblick auf Bauelemente mit reellen Feldwellenwiderständen der Zuleitungen oder Netzwerke mit reellen Impedanzen von Generatoren und Verbrauchern formuliert. Die allgemeinere Definition (52) wurde zuerst von Penfield [23] angegeben und bildet den Ausgangspunkt vieler Untersuchungen, z.B. von [37], [24], [18], [26], [27] (in zeitlicher Reihenfolge). Zum Teil wird dabei die Definition durch Phasen-

Faktoren modifiziert, was jedoch für das Leistungsverhalten uninteressant ist. Gesichtspunkte, die für die Wahl der Phase von Interesse sind, werden in [18] erläutert. Abschließend sei auf die Arbeit [17] verwiesen, in der ein Abriß der historischen Entwicklung bis zur Definition (52) von Penfield gegeben wird.

Würde man sich auf reelle Bezugsimpedanzen beschränken, so ließe man wesentliche Probleme der n-Tor Theorie unberücksichtigt. Die Aufgabe der Leistungsanpassung eines Verbrauchers mit komplexer Impedanz an einen Generator mit komplexer Innenimpedanz kann dann nicht mehr allgemein formuliert werden, vielmehr muß man das Problem auf die Anpassung reeller Impedanzen transformieren, indem man die Imaginärteile der komplexen Impedanzen formal zum Anpassungszweitor zählt. Dieser Umstand scheint zunächst kein Nachteil zu sein, es zeigt sich jedoch, daß man durch diese Transformation Aspekte für eine Zweitorsynthese vernachlässigt. Dasselbe gilt für eine n-Tor Synthese, wenn man von der Vorstellung der Anpassung von (n-1) Verbrauchern an einen Generator ausgeht. Auf die angeschnittene Problematik wird in 3.5. und 5.4.3. näher eingegangen.

Ein weiterer wichtiger Umstand spricht für die Einführung komplexer Bezugsimpedanzen besonders bei höheren Frequenzen. Beim Zusammenschalten von n-Toren geht man von der Vorstellung aus, einzelne Tore durch verlustlose, homogene Leitungen zu verbinden. Für eine Berechnung der Leistungsübertragung legt man dann zweckmäßig den (notwendig reellen) Feldwellenwiderstand der Leitung als Bezugsimpedanz zugrunde. In der Praxis treten jedoch stets Verluste auf, so daß man ohne eine erneute Ersatzschaltungsvorstellung für die verlustbehaftete Leitung nicht auszukommen scheint. Einen Ausweg gibt es dann, wenn man den komplexen Feldwellenwiderstand der verlustbehafteten Leitung als Bezugsimpedanz zuläßt. Die Berechnung des Leistungsübertragungsverhaltens (siehe 3.2.) wird dadurch sehr übersichtlich.

3.2. Definition und physikalische Bedeutung der Streumatrix

Ein quellenfreies, lineares n-Tor wird durch Gl. (6) beschrieben. Nun legt man die konstanten Matrizen $\underline{C}_i$ durch (52) fest, indem man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (mit den a_ν, b_ν als Komponenten) mit den in (6) auftretenden Vektoren identifiziert

$$\vec{b} = \underline{C}_1\vec{U} + \underline{C}_2\vec{I} \qquad \vec{a} = \underline{C}_3\vec{U} + \underline{C}_4\vec{I} \tag{55}$$

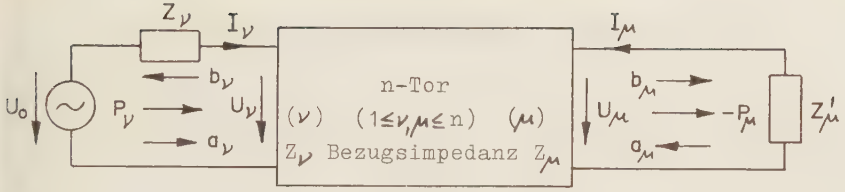
$$\underline{C}_1 = \underline{C}_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}(Z_1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}(Z_n)}} \end{pmatrix} \qquad \underline{C}_4 = -\underline{C}_2^{*} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{Z_1}{\sqrt{\mathrm{Re}(Z_1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{Z_n}{\sqrt{\mathrm{Re}(Z_n)}} \end{pmatrix} \tag{56}$$

Wenn ein Satz von Bezugsimpedanzen $Z_1 \ldots Z_n$ festliegt, dann sind die Eigenschaften des n-Tors vollständig durch $\underline{K}$ in (6) bestimmt, falls $\underline{K}$ nicht singulär ist. Man schreibt für $\underline{K}$ bei der Festsetzung (56) im allgemeinen $\underline{S}$ und spricht in Analogie zur Streuung von Wellen in der Optik von einer Streumatrix. (6) stellt also bei Berücksichtigung von (55) und (56) die Definitionsgleichung von $\underline{S}$ dar

$$\vec{b} = \underline{S}\ \vec{a} \tag{57}$$

Damit ist zunächst nur gezeigt, daß man ein quellenfreies n-Tor unter Umständen durch eine Streumatrix beschreiben kann. Von ausschlaggebender Bedeutung für die Zweckmäßigkeit des Formalismus ist jedoch die Tatsache, daß die Beschreibung durch ein $\underline{S}$ nach (57) zumindest bei Passivität des n-Tors und der Bezugsimpedanzen immer möglich ist (Beweis siehe [11]).

Die physikalische Bedeutung der Streumatrixelemente soll nun an Hand von (54), (57) und Abb. 7 geklärt werden. Das Leistungsübertragungsverhalten des n-Tors erhält man mit Hilfe von (54). Zur Veranschaulichung dient Abb. 7, die die Leistungsübertragung von einem Generator am Tor ν zum Abschluß Z'_μ am Tor μ darstellt. Es ist üblich, das Verhältnis der am Tor μ auslaufenden Leistung ($-P$) zu der am Tor ν maximal verfügbaren



(Abb. 7: Leistungsübertragung durch ein n-Tor)

eistung P_{max} als Leistungsübertragungsfaktor $G_{\nu\mu}$ zu bezeichnen

$$G_{\nu\mu} = (-P_\mu)/\, P_{max} = (|b_\mu|^2 - |a_\mu|^2)/|a_\nu|^2 \qquad (58)$$

Bezugsimpedanz am Tor ν ist die Innenimpedanz des Generators, dagegen ist die Bezugsimpedanz am Tor μ vorläufig noch willkürlich und braucht nicht mit dem tatsächlichen Abschluß Z'_μ übereinzustimmen. $G_{\nu\mu}$ ist natürlich von der Wahl von Z_μ unabhängig, da die Leistung P_μ nur durch den tatsächlichen Abschluß Z'_μ bestimmt ist. Neben $G_{\nu\mu}$ ist das Verhältnis der am Tor μ auslaufenden Leistung $(-P_\mu)$ zu der tatsächlich vom Tor ν aufgenommenen Leistung P_ν

$$G'_{\nu\mu} = (-P_\mu)/P_\nu = (|b_\mu|^2 - |a_\mu|^2)/(|a_\nu|^2 - |b_\nu|^2) \qquad (59)$$

von Interesse, das noch genauer über das Leistungsübertragungsverhalten des n-Tors Aufschluß gibt. $G'_{\nu\mu}$ soll als 'Torleistungsübertragungsfaktor' bezeichnet werden. Er ist genau dann mit $G_{\nu\mu}$ identisch, wenn Tor ν an den Generator leistungsmäßig angepaßt ist, d.h. wenn $b_\nu = 0$ gilt. Von 'Übertragungs'-faktor kann man natürlich nur für positive $G'_{\nu\mu}$ sprechen, d.h. wenn entweder $P_\nu > 0$, $P_\mu < 0$ oder $P_\nu < 0$, $P_\mu > 0$ ist. Der erste Fall entspricht einem Leistungstransport vom Tor ν zum Tor μ, im zweiten Fall erfolgt er in umgekehrter Richtung. Wenn sowohl $P_\nu > 0$ als auch $P_\mu > 0$ gilt, spricht man zweckmäßig von 'Absorptionsverhältnis', bei P_ν, $P_\mu < 0$ von 'Ergiebigkeitsverhältnis'. In beiden Fällen gilt $G'_{\nu\mu} < 0$. Bei Leistungstransport vom Tor ν zum Tor μ kann man aus $G'_{\nu\mu} > 1$ schließen, daß das n-Tor entweder selbst aktiv ist oder eines seiner übrigen Tore mit einem aktiven Abschluß versehen ist. Fließt Wirkleistung in umgekehrter Richtung, so ist $0 < G'_{\nu\mu} < 1$ Indiz für aktives Ver-

halten des n-Tors oder eines seiner übrigen Abschlüsse.

Interessant ist der Spezialfall, daß am Tor μ $Z_\mu = Z_\mu'$ gewählt wird, der Abschluß also die Bezugsimpedanz darstellt. Aus (52) folgt damit $a_\mu = 0$ und aus (58) (mit (52) und $U_\mu = -Z_\mu I_\mu$)

$$G_{\nu\mu} = |b_\mu|^2/|a_\nu|^2 = |U_\mu - Z_\mu^* I_\mu|^2 \, 8\,\mathrm{Re}(Z_\nu) \,/|U_0|^2 \quad (60)$$

$$= \frac{\mathrm{Re}(Z_\mu)\,|I_\mu|^2}{\frac{|U_0|^2}{4\,\mathrm{Re}(Z_\nu)}}$$

Für den Fall, daß auch alle übrigen Tore mit ihren Bezugsimpedanzen abgeschlossen sind, so daß $a_\mu = 0$ für $\mu = 1 \ldots n$, $\mu \neq \nu$, wird, gilt wegen (57)

$$G_{\nu\mu} = |S_{\mu\nu}|^2 \quad (61)$$

Die Betragsquadrate der Nichtdiagonalelemente der Streumatrix stellen also gerade die Leistungsübertragungskoeffizienten eines n-Tors dar, wenn es mit seinen Bezugsimpedanzen abgeschlossen ist. Anders formuliert erhält man die Leistungsübertragungsfaktoren eines n-Tors, indem man die Streumatrix in bezug auf die Impedanzen der Abschlüsse berechnet und die Betragsquadrate der Nichtdiagonalelemente bildet.

Nun soll noch $|S_{\nu\nu}|^2$ berechnet werden. Unter der Voraussetzung $a_\mu = 0$ ($\mu = 1 \ldots n$, $\mu \neq \nu$) liefern (52), (57) und $U_0 = U_\nu + Z_\nu I_\nu$

$$|S_{\nu\nu}|^2 = |U_\nu - Z_\nu^* I_\nu|^2 / |U_\nu + Z_\nu I_\nu|^2 = |U_0 - 2\mathrm{Re}(Z_\nu) I_\nu|^2 / |U_0|^2$$

$$= 1 - \frac{\mathrm{Re}(U_0 I_\nu^*) - \mathrm{Re}(Z_\nu)\,|I_\nu|^2}{\frac{|U_0|^2}{4\,\mathrm{Re}(Z_\nu)}} = 1 - \frac{\mathrm{Re}(U_\nu I_\nu^*)}{\frac{|U_0|^2}{4\,\mathrm{Re}(Z_\nu)}}$$

$$= 1 - P_\nu / P_{max} \quad (62)$$

$|S_{\nu\nu}|^2$ ist also ein Maß für die Leistungsfehlanpassung des Tores ν .

1.3. Beziehungen zwischen Streumatrix und Impedanz- bzw. Admittanzmatrix

Zunächst setzt man voraus, daß nur solche n-Tore betrachtet werden, die neben einer Streumatrix $\underline{S}$ auch eine Impedanzmatrix $\underline{W}$ und eine Admittanzmatrix $\underline{L}$ besitzen. Die Transformationsgleichungen (52) lassen sich in Vektorform wie folgt schreiben

$$\vec{a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}}(\vec{U} + \underline{Z}\,\vec{I}) \qquad \vec{b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}}(\vec{U} - \underline{Z}^{*}\vec{I}) \tag{63}$$

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Z_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{Re}(Z_n) \end{pmatrix} \qquad \underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_n \end{pmatrix} \tag{64}$$

mit $\mathrm{Re}(Z_\nu) > 0$, $\nu = 1 \ldots n$. Setzt man (8) bzw. (9) in (63) ein, so erhält man mit (57) $\underline{S}$ als Funktion von $\underline{W}$ bzw. $\underline{L}$

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \underline{R}^{-\frac{1}{2}}(\underline{W} - \underline{Z}^{*})(\underline{W} + \underline{Z})^{-1}\,\underline{R}^{\frac{1}{2}} = \underline{R}^{-\frac{1}{2}}(\underline{1} - \underline{Z}^{*}\underline{L})(\underline{1} + \underline{Z}\,\underline{L})^{-1}\,\underline{R}^{\frac{1}{2}} \\
&= \underline{R}^{-\frac{1}{2}}(\underline{1} - 2\underline{R}(\underline{W} + \underline{Z})^{-1})\,\underline{R}^{\frac{1}{2}} = \underline{R}^{-\frac{1}{2}}(\underline{1} - 2\underline{R}\underline{L}(\underline{1} + \underline{Z}\,\underline{L})^{-1})\,\underline{R}^{\frac{1}{2}} \\
&= \underline{R}^{\frac{1}{2}}(\underline{1} - 2(\underline{W} + \underline{Z})^{-1}\underline{R})\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}} = \underline{R}^{\frac{1}{2}}(\underline{1} - 2(\underline{1} + \underline{L}\,\underline{Z})^{-1}\underline{L}\underline{R})\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \underline{R}^{\frac{1}{2}}(\underline{W} + \underline{Z})^{-1}(\underline{W} - \underline{Z}^{*})\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}} = \underline{R}^{\frac{1}{2}}(\underline{1} + \underline{L}\,\underline{Z})^{-1}(\underline{1} - \underline{L}\,\underline{Z}^{*})\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{65}$$

wobei man zum Umformen die Beziehungen

$$\underline{W} - \underline{Z}^{*} = \underline{W} + \underline{Z} - 2\underline{R} \tag{66}$$

$$\underline{1} - \underline{Z}^{*}\underline{L} = \underline{1} + \underline{Z}\,\underline{L} - 2\underline{R}\,\underline{L} \tag{67}$$

benutzt. Auflösen von (65) nach $\underline{W}$ bzw. $\underline{L}$ liefert

$$\begin{aligned}
\underline{W} &= \underline{R}^{\frac{1}{2}}(\underline{1} - \underline{S})^{-1}(\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z})\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \underline{R}^{\frac{1}{2}}(2(\underline{1} - \underline{S})^{-1}\underline{R} - \underline{Z})\,\underline{R}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \underline{R}^{-\frac{1}{2}}(2\underline{R}(\underline{1} - \underline{S})^{-1} - \underline{Z})\,\underline{R}^{\frac{1}{2}} \\
&= \underline{R}^{-\frac{1}{2}}(\underline{Z}^{*} + \underline{Z}\,\underline{S})(\underline{1} - \underline{S})^{-1}\,\underline{R}^{\frac{1}{2}} = \underline{L}^{-1}
\end{aligned} \tag{68}$$

Offenbar existiert zu einem $\underline{S}$ genau dann ein $\underline{W}$, wenn

$$\det(\underline{1} - \underline{S}) \neq 0 \tag{69}$$

gilt, und ein $\underline{L}$, wenn

$$\det(\underline{Z}^* + \underline{Z}\,\underline{S}) \neq 0 \tag{70}$$

ist. Da $\underline{Z}$ eine Diagonalmatrix ist, gilt

$$\det(\underline{Z}^* + \underline{Z}\underline{S}) = \det(\underline{Z}(\underline{Z}^{-1}\underline{Z}^* + \underline{S})) = \det((\underline{Z}^*\underline{Z}^{-1} + \underline{S})\underline{Z}) = \det(\underline{Z}^* + \underline{S}\underline{Z}) \tag{71}$$

und (70) braucht wegen der zwei Darstellungsmöglichkeiten von $\underline{L}$ in (68) nicht modifiziert zu werden.

3.4. Energetische n-Tor Klassifizierungen

Als Hauptvorteil des Streumatrixformalismus hat sich die einfache Beschreibung des Leistungsübertragungsverhaltens von n-Toren herausgestellt. Die Streumatrix ist eine Funktion der Bezugsimpedanzen, die die Transformation von $\vec{U}$, $\vec{I}$ in Leistungswellen $\vec{a}$, $\vec{b}$ vermitteln. Diese Tatsache scheint ein Nachteil für Klassifizierungen von n-Toren zu sein. In diesem Abschnitt wird jedoch in Anlehnung an [26] gezeigt, daß die wichtigsten n-Tor Einteilungen durch Streumatrixeigenschaften gekennzeichnet sind, die nicht von den Bezugsimpedanzen abhängen.

Die vom gesamten n-Tor aufgenommene Leistung P_A ergibt sich als Summe über alle P_ν (siehe (54)). Je nachdem, ob man die Matrixdarstellung (8), (9) oder (57) zugrundelegt, erhält man

$$P_A = \frac{1}{4}\,\vec{I}^{*T}(\underline{W} + \underline{W}^{*T})\,\vec{I} \tag{72}$$

$$- \frac{1}{4}\,\vec{U}^{*T}(\underline{L} + \underline{L}^{*T})\,\vec{U} \tag{73}$$

$$= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = \vec{a}^{*T}(\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S})\,\vec{a} \tag{74}$$

P_A ist damit als hermitesche Form (siehe [39]) dargestellt, aus der man energetische Klassifizierungen für die in (72),(73) und (74) verwendeten Matrizen abliest. Wählt man speziell Gl. (74) aus dem Streumatrixformalismus, so gilt

'aktiv' ($P_A < 0$ unabhängig von $\vec{a}$) $\longleftrightarrow$ ($\underline{S}^{*T}\underline{S}-\underline{1}$) positiv definit

($P_A \leq 0$, '=' mindestens für ein $\vec{a} \neq 0$, aber nicht für alle) $\longleftrightarrow$ " positiv semi-definit

'neutral' oder 'verlustlos'

($P_A = 0$ unabhängig von $\vec{a}$) $\longleftrightarrow$ $\underline{S}^{*T}\underline{S} = \underline{1}$, $\underline{S}$ unitär

'passiv' oder 'verlustbehaftet'

($P_A \geq 0$, '=' mindestens für ein $\vec{a} \neq 0$, aber nicht für alle) $\longleftrightarrow$ ($\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S}$) positiv semi-definit

($P_A > 0$ unabhängig von $\vec{a}$) $\longleftrightarrow$ " positiv definit

Die Wahl der Bezugsimpedanzen ist offenbar ohne Belang. Natürlich gibt es n-Tore, für die keines der aufgeführten Kriterien erfüllt ist, d.h. P_A nimmt dann je nach Wahl von $\vec{a}$ positive oder negative Werte an oder verschwindet. Beispiele aus konzentrierten Schaltelementen für die verschiedenen Gruppen von n-Toren findet man in [26], wo eine ähnliche Klassifizierung angegeben wird.

3.5. Bedeutung und Realisierung von Bezugsimpedanzen; Streumatrixtransformation durch Wechsel der Bezugsimpedanzen

In 3.1. wurden die Bezugsimpedanzen als Rechengrößen eingeführt, die die Transformation von Strömen und Spannungen in Leistungswellen vermitteln. Physikalische Bedeutung erhalten die a_ν und b_ν genau dann, wenn man als Bezugsimpedanzen die Impedanzen der quellenfreien Abschlüsse (bzw. die Innenimpedanz einer Eintorquelle) festlegt. Für diesen Fall stellen die Betragsquadrate der durch (57) definierten Streumatrixelemente

Leistungsübertragungsfaktoren dar, oder sie sind ein Maß für Leistungsfehlanpassung (siehe (61), (62)). Alle Überlegungen dienen dazu, einen Matrixformalismus vom Typ (6) zu entwickeln, der im Unterschied zur Impedanz- bzw. Admittanzmatrixtheorie die Abschlüsse des n-Tors als Parameter enthält und damit eine umfassendere Beschreibung in einer konkreten Schaltung ermöglicht. Vom 'analytischen' Gesichtspunkt dient der Streumatrixformalismus bisher nur zur Berechnung des Leistungsflusses bei vorgegebenen Abschlüssen, äußerst wichtig ist er jedoch auch von einem 'synthetischen' Gesichtspunkt her, der von Schwartz in [26] im Rahmen der Netzwerktheorie bearbeitet wird. Man kann nach Vorgabe von n Abschlüssen und einem bestimmten gewünschten Leistungsübertragungsverhalten danach fragen, ob dieses Verhalten mit gewissen n-Toren durch geeignete Bezugsimpedanzen zu verwirklichen ist. Man verzichtet also darauf, ein vollständig neues n-Tor zu bauen und versucht vielmehr, mit schon vorhandenen Bauelementen auszukommen. Falls es möglich ist, zu einem bereits vorhandenen n-Tor einen Satz von Bezugsimpedanzen zu berechnen, so daß die zugehörige Streumatrix das gewünschte Leistungsübertragungsverhalten repräsentiert, dann ist das Problem der n-Tor Synthese auf die Synthese von n Bezugsimpedanzen reduziert. Die Realisierung der Bezugsimpedanzen erreicht man durch verlustlose Anpassungszweitore, die zwischen n-Tor und die vorgegebenen Abschlüsse geschaltet werden und die Abschlußimpedanzen in die Bezugsimpedanzen (als neue n-Tor Abschlüsse) transformieren. Verlustlosigkeit der Zweitore muß natürlich gefordert werden, um das Leistungsübertragungsverhalten zu den zu Beginn vorgegebenen Abschlüssen nicht erneut zu ändern.

Auf das hier angeschnittene Problem der Streumatrixsynthese wird in 5.4.3. eingegangen. Die sich anbietenden Möglichkeiten beruhen auf der Streumatrixtransformation, die man durch Bezugsimpedanzwechsel (ohne Verändern des n-Tors selbst) erhält. Sie soll nun behandelt werden.

Gegeben sei ein n-Tor mit einer Streumatrix $\underline{S}$ und einer Diagonalmatrix $\underline{Z}$, deren Elemente nach (64) die Bezugsimpedanzen

darstellen. Beim Übergang zu anderen Bezugsimpedanzen, d.h. zu einer Diagonalmatrix $\underline{Z}'$, ergibt sich eine Streumatrix $\underline{S}'$, die nun als Funktion von $\underline{S}$, $\underline{Z}$ und $\underline{Z}'$ berechnet wird. Aus (57) erhält man durch Umformen mit (63) und (64)

$$(\underline{1} - \underline{S})\underline{R}^{-\frac{1}{2}}\vec{U} = (\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z})\underline{R}^{-\frac{1}{2}}\vec{I} \tag{75}$$

Nach dem Wechsel der Bezugsimpedanzen gilt

$$(\underline{1} - \underline{S}')\underline{R}'^{-\frac{1}{2}}\vec{U} = (\underline{Z}'^{*} + \underline{S}'\underline{Z}')\underline{R}'^{-\frac{1}{2}}\vec{I} \tag{76}$$

Aus (75) und (76) schließt man, daß die bei $\vec{U}$ und $\vec{I}$ stehenden Matrizen bis auf eine Matrix $\underline{A}$ (mit $\det(\underline{A}) \neq 0, \infty$, damit eine eineindeutige Transformation vorliegt) übereinstimmen

$$\underline{A}(\underline{1} - \underline{S})\underline{R}^{-\frac{1}{2}} = (\underline{1} - \underline{S}')\underline{R}'^{-\frac{1}{2}} \tag{77}$$

$$\underline{A}(\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z})\underline{R}^{-\frac{1}{2}} = (\underline{Z}'^{*} + \underline{S}'\underline{Z}')\underline{R}'^{-\frac{1}{2}} \tag{78}$$

Multiplizieren von (77) mit $\underline{Z}'^{*}$ und Subtraktion von (78) gibt

$$\underline{A}(\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z} - (\underline{1} - \underline{S})\underline{Z}'^{*})\underline{R}^{-\frac{1}{2}} = 2\underline{S}'\underline{R}'^{\frac{1}{2}} \tag{79}$$

Entsprechend folgt aus der Addition von (78) und der mit $\underline{Z}'$ multiplizierten Gleichung (77)

$$\underline{A}(\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z} + (\underline{1} - \underline{S})\underline{Z}')\underline{R}^{-\frac{1}{2}} = 2\underline{R}'^{\frac{1}{2}} \tag{80}$$

Wegen $\det(\underline{R}'^{\frac{1}{2}}) \neq 0$ und $\det(\underline{A}) \neq 0, \infty$ muß

$$\det(\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z} + (\underline{1} - \underline{S})\underline{Z}') \neq 0 \tag{81}$$

vorausgesetzt werden, was Kriterium für die Durchführbarkeit der Transformation (75) $\longrightarrow$ (76) ist. Für die Klasse der eineindeutigen Transformationen ist (81) erfüllt, so daß man in (80) nach $\underline{A}$ auflösen und das Ergebnis in (79) einsetzen kann

$$\underline{S}' = \underline{R}'^{\frac{1}{2}}\underline{R}^{\frac{1}{2}}(\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z} + (\underline{1} - \underline{S})\underline{Z}')^{-1}(\underline{Z}^{*} + \underline{S}\,\underline{Z} - (\underline{1} - \underline{S})\underline{Z}'^{*})\underline{R}^{-\frac{1}{2}}\underline{R}'^{-\frac{1}{2}} \tag{82}$$

Es gibt also zu einem beliebigen Satz von Bezugsimpedanzen Z'_ν, $\nu = 1 \ldots n$, $\mathrm{Re}(Z'_\nu) > 0$, eine nichtsinguläre Streumatrix $\underline{S}'$, wenn es nur für einen gewissen Satz von Z_ν, $\nu = 1 \ldots n$, $\mathrm{Re}(Z_\nu) > 0$, ein nichtsinguläres $\underline{S}$ gibt und (81) erfüllt ist. $\underline{S}'$ wird für Matrizen $\underline{Z}'$ genau dann singulär, wenn in (81) das Gleichheitszeichen steht.

(82) ist einfacher als die in [26] und [27] angegebenen Formeln, aber man kann durch einige Matrizenumformungen zeigen, daß sie für den Fall $\det(\underline{1} - \underline{S}) \neq 0$ mit (82) übereinstimmen. In [26] und [27] wird die Tatsache benutzt, daß beim Wechsel der Bezugsimpedanzen $\underline{W}$ invariant bleibt. Damit sind n-Tore ohne Impedanzmatrix von den Betrachtungen ausgeschlossen, und die in [26] und [27] angegebenen Formeln gelten nicht mehr für $\det(\underline{1} - \underline{S}) = 0$, woraus nach (68) ein singuläres $\underline{W}$ folgt.

3.6. Eingangs- und Ausgangsreflexionsfaktor eines n-Tors

Als Eingangsreflexionsfaktor $\Gamma_{\nu E}$ am Tor ν definiert man mit Hilfe von (52) den Quotienten aus reflektierter und einfallender Leistungswelle

$$\Gamma_{\nu E} = b_\nu / a_\nu = (Z_{\nu E} - Z_\nu^*)/(Z_{\nu E} + Z_\nu) \qquad (83)$$

Alle übrigen Tore müssen quellenfrei abgeschlossen sein. Die Analogie zum Reflexionskoeffizienten einer Welle am Abschluß einer verlustlosen Leitung ist offensichtlich, ein Beobachter schaut dort in Richtung der Leitung auf den Abschluß. Die Vorstellung bedeutet auf das n-Tor übertragen, daß man auf die Eingangsimpedanz $Z_{\nu E}$ blickt. Wählt man als n-Tor Zuleitung am Tor ν einen verlustlosen Wellenleiter, so ist $\Gamma_{\nu E}$ genau dann mit dem Reflexionskoeffizienten der Wellenleitertheorie identisch, wenn die Bezugsimpedanz gleich dem Feldwellenwiderstand des Wellenleiters ist. In (83) sind beliebige komplexe Z_ν mit $\mathrm{Re}(Z_\nu) > 0$ zugelassen, und man unterscheidet folgende Fälle: für $\mathrm{Re}(Z_{\nu E}) \geq 0$ gilt $|\Gamma_{\nu E}| \leq 1$, bei $\mathrm{Re}(Z_{\nu E}) < 0$ wird $|\Gamma_{\nu E}| > 1$.

Nun betrachtet man eine Eintorquelle, wobei man z.B. von Gleichung (3) ausgeht, die ein Ersatzschaltbild mit Urspannung U_o beschreibt. Einsetzen von (53) und Berücksichtigen der Stromrichtung gemäß Abb. 2 ergibt aufgelöst nach b

$$b = \frac{\sqrt{2Re(Z)}\ U_o}{2(Z + Z_i)} + a\,\frac{Z_i - Z^*}{Z_i + Z} \qquad (84)$$

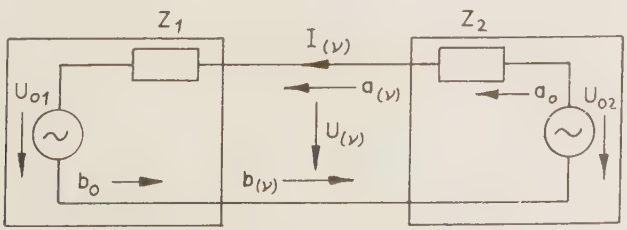
Der in (53) auftretende Index ν wurde bei allen Größen weggelassen, da ein Eintor vorliegt. Nach [6] schreibt man (84)

$$b = b_o + \Gamma_E\, a \qquad (85)$$

$$b_o = \frac{\sqrt{2Re(Z)}\ U_o}{2(Z + Z_i)} \qquad \Gamma_E = \frac{Z_i - Z^*}{Z_i + Z}$$

In Analogie zu U_o und I_o in (3) und (4), die eine Ersatzspannungs- bzw. -stromquelle darstellen, spricht man von einer'Ersatzwellenquelle' b_o mit einem inneren (Eingangs-) Reflexionsfaktor Γ_E (vergleiche [6], wo im Unterschied zu (85) nur reelle Bezugsimpedanzen auftreten). Im Grenzfall des quellenfreien Eintors ($b_o = 0$) sind (83) und (85) identisch.

Abb. 8 zeigt die Zusammenschaltung zweier Eintorquellen. Eine von ihnen (etwa die linke) kann man als Ersatzschaltung eines quellenfreien n-Tors auffassen, das an einem seiner Tore mit einer Eintorquelle und am Tor ν mit der gezeichneten zweiten Eintorquelle (Urspannung U_{o2}, Innenimpedanz Z_2) verbunden ist. Die übrigen Tore sind mit quellenfreien Abschlüssen versehen.



(Abb. 8: Zusammenschalten zweier Eintorquellen zur Definition von Reflexionsfaktoren)

Ebensogut kann man auch die rechte Quelle als entsprechende Ersatzschaltung mit einem m-Tor auffassen, daher ist das Festlegen eines Bezugspfeils für den Strom nach Abb. 8 willkürlich (vergleiche Abb. 5). Mit den dortigen Bezeichnungen gilt

$$U_{(\nu)} = Z_1 I_{(\nu)} + U_{01} = -Z_2 I_{(\nu)} + U_{02} \tag{86}$$

Nun führt man als formale Größe die Bezugsimpedanz Z_ν ein und wendet die Transformation (53) auf (86) an. Man erhält

$$b_{(\nu)} = a_{(\nu)} \frac{Z_1 - Z_\nu^*}{Z_1 + Z_\nu} + \frac{\sqrt{\mathrm{Re}(Z_\nu)}\, U_{01}}{(Z_1 + Z_\nu)\sqrt{2}} = a_{(\nu)} \Gamma_{(\nu)E} + b_0 \tag{87}$$

$$a_{(\nu)} = b_{(\nu)} \frac{Z_2 - Z_\nu}{Z_2 + Z_\nu^*} + \frac{\sqrt{\mathrm{Re}(Z_\nu)}\, U_{02}}{(Z_2 + Z_\nu^*)\sqrt{2}} = b_{(\nu)} \Gamma_{(\nu)A} + a_0 \tag{88}$$

Gl. (87) ist der Gl. (85) äquivalent, der bei $a_{(\nu)}$ stehende Term $\Gamma_{(\nu)E}$ stellt den formalen Eingangsreflexionsfaktor dar, der für $Z_\nu = Z_2$ mit dem Eingangsreflexionsfaktor im üblichen Sinne übereinstimmt. Vom Verfasser wird nun vorgeschlagen, die Gl. (88) in Analogie zu (87) als Definitionsgleichung für einen formalen 'Ausgangsreflexionsfaktor' $\Gamma_{(\nu)A}$ aufzufassen. Der Begriff 'Ausgang' wird auf Grund der vorher festgelegten Richtung des Strompfeils gewählt und soll die Stellung eines Beobachters charakterisieren, der bei (87) auf die Quelle 1 (in das n-Tor hinein) und bei (88) auf die Quelle 2 (aus dem n-Tor heraus) blickt.

Für $U_{01} = b_0 = 0$ stellt Abb. 8 eine Ersatzschaltung für die Verbindung des Tores ν eines quellenfreien n-Tors ($n \geq 1$) mit einer Eintorquelle (Urspannung U_{02}, Innenimpedanz Z_2) dar. Alle übrigen Tore sind quellenfrei abgeschlossen. Z_1 repräsentiert dann die Eingangsimpedanz $Z_{\nu E} = U_\nu / I_\nu$ am Tor ν, und der Eingangsreflexionsfaktor ist durch (83) bzw. (87) gegeben.

Abb. 8 zeigt für $U_{02} = a_0 = 0$ die Zusammenschaltung eines quellenfreien Eintors (Impedanz Z_2) mit einer Eintorquelle oder dem Tor ν eines quellenfreien n-Tors, das an einem anderen Tor mit einer Eintorquelle abgeschlossen ist. Zweckmäßig be-

zeichnet man Z_2 nun als 'Ausgangsimpedanz' $Z_{\nu A}$, um anzudeuten, daß die Impedanz als Abschluß am Tor ν verwendet wird. Mit (88) erhält man als Ausgangsreflexionsfaktor

$$\Gamma_{\nu A} = a_\nu / b_\nu = (Z_{\nu A} - Z_\nu)/(Z_{\nu A} + Z_\nu^*) \qquad (89)$$

Die Reflexionsfaktoren $\Gamma_{\nu E} = 0$, $\Gamma_{\nu A} = 0$ definieren formale 'Anpassungsfälle'. Da die a_ν, b_ν wegen (54) 'Leistungswellen' sind, und die Reflexionsfaktoren Amplitudenverhältnisse dieser 'Wellen' darstellen, spricht man genauer von 'formaler Leistungsanpassung' eines Eingangs ($\Gamma_{\nu E} = 0$) oder Ausgangs, d.h. eines Abschlusses ($\Gamma_{\nu A} = 0$) eines n-Tors. Aus $\Gamma_{\nu E} = 0$ folgt mit (83) $Z_{\nu E} = Z_\nu^*$, d.h. ein n-Tor ist am Tor ν genau dann 'leistungsmäßig angepaßt', wenn die Eingangsimpedanz gleich dem konjugiert komplexen Wert der Bezugsimpedanz ist. $\Gamma_{\nu A} = 0$ bedeutet nach (89) $Z_{\nu A} = Z_\nu$. Ein Abschluß ist also genau dann formal an das Tor ν eines n-Tors 'leistungsmäßig angepaßt' (d.h. es existiert keine vom Abschluß reflektierte Welle a_ν), wenn er aus der Bezugsimpedanz des Tores ν besteht. Der durch diese Bemerkungen eingeführte Begriff der formalen Leistungsanpassung ist nur dann mit physikalischer Leistungsanpassung identisch, wenn die tatsächlich angeschaltete Impedanz am Tor ν Bezugsimpedanz ist und $Z_{\nu E} = Z_\nu^*$ gilt.

Wegen ihrer Bedeutung als Hilfsmittel für die n-Tor-Analyse sollen nun noch Werte von Eingangs- bzw. Ausgangsreflexionsfaktoren zweier besonders einfacher Eintore berechnet werden. Ihre Eingangsimpedanzen seien mit Z_E, die 'Ausgangsimpedanzen' mit $Z_{\nu A}$ bezeichnet, womit angedeutet werden soll, daß die Eintore als Abschlüsse des Tores ν eines n-Tors verwendet werden. (Selbstverständlich gilt $Z_{\nu A} \equiv Z_E$).

1.) Leerlauf ($Z_{\nu A} = Z_E = \infty$): Eingangs- und Ausgangsreflexionsfaktor sind unabhängig von der Wahl der Bezugsimpedanz

$$\Gamma_L = 1 \qquad (90)$$

In der Bezeichnung wird daher nicht zwischen Eingangs- und

Ausgangsreflexionsfaktor unterschieden.

2.) Kurzschluß ($Z_{\nu A} = Z_E = 0$): (83) ergibt für den Eingangsreflexionsfaktor (Bezugsimpedanz Z, $\arg(Z) = \varphi$)

$$\Gamma_{EK} = -\exp(-2i\varphi) \tag{91}$$

Aus (89) erhält man den Ausgangsreflexionsfaktor am Tor ν eines n-Tors in bezug auf die Impedanz Z_ν mit $\arg(Z_\nu) = \varphi_\nu$

$$\Gamma_{\nu AK} = -\exp(+2i\varphi_\nu) \tag{92}$$

3.7. Reflexionsfaktortransformation

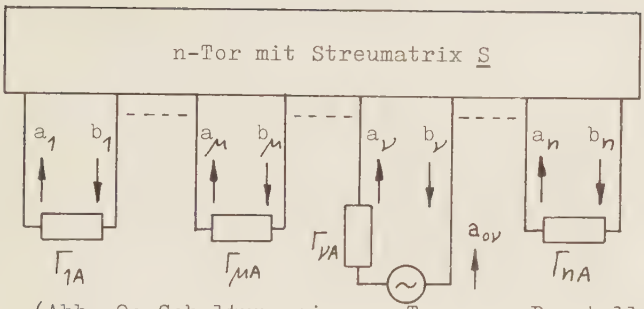
Die Gleichungen (8), (9) und (57) stellen verschiedene lineare Systeme zur Beschreibung von n-Toren dar. Mit Hilfe von (8) und (9) wurden in 2.2.1. und 2.2.2. Formeln für Strom-, Spannungs-, Impedanz- und Admittanztransformation berechnet, und man kann analog dazu die Transformationen der Wellengrößen a_ν und b_ν mit (57) untersuchen. Dazu betrachtet man die der Abb. 6 äquivalente Abb. 9, in der alle Bauelemente durch Größen aus dem Streumatrixformalismus charakterisiert sind. Mit (88) und (89) beschreibt man die Abschlüsse des n-Tors

$$a_\nu = a_{0\nu} + \Gamma_{\nu A}\, b_\nu \qquad 1 \leq \nu \leq n \tag{93}$$

$$a_\mu = \Gamma_{\mu A}\, b_\mu \qquad \mu = 1 \ldots n,\ \mu \neq \nu \tag{94}$$

und faßt die Gleichungen als Nebenbedingungen zu (57) auf. Alle möglichen Transformationen der Wellengrößen kann man nun analog zu den Transformationen in 2.2.1. und 2.2.2. berechnen.

Im Unterschied zu den in einer physikalischen Messung zugänglichen Größen U_ν und I_ν sind die 'Wellen' a_ν und b_ν zunächst



(Abb. 9: Schaltung eines n-Tors zur Darstellung von Transformationen mit Hilfe der Streumatrix)

nur formale Rechenvariable. Von den im Streumatrixformalismus behandelten Größen sind nur Leistungen und Reflexionsfaktoren meßbar, letztere auch nur im HF- und Mikrowellenbereich. Berücksichtigt man den einfachen funktionalen Zusammenhang von Reflexionsfaktoren und Impedanzen (siehe (83), (89)), so kann man die Einschränkung von Reflexionsfaktormessungen auf den HF- und Mikrowellenbereich fallen lassen, da sich Reflexionsfaktoren im niederfrequenten Gebiet sofort mit Hilfe von Impedanzen angeben lassen. Umgekehrt wird man Impedanzmessungen im hochfrequenten Bereich als Reflexionsfaktormessungen durchführen und die Impedanzen durch Rücktransformation bestimmen. Der Eingangsreflexionsfaktor $\Gamma_{\nu E}$ läßt sich mit $\underline{S}$ als Funktion der $\Gamma_{\mu A}$ ($\mu = 1 \ldots n$, $\mu \neq \nu$) berechnen, was man in Analogie zur Impedanz- (Admittanz-) transformation als Reflexionsfaktortransformation bezeichnet. Sie ist bedeutungsvoll im Hinblick auf eine praktische Verwendung, weil Reflexionsfaktormessungen genauer als Leistungsmessungen sind.

Einsetzen von (93) und (94) in (57) ergibt das lineare System

$$
\begin{aligned}
0 &= (S_{11}\Gamma_{1A} - 1)a_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + S_{1n}\Gamma_{1A}\,a_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-a_{0\nu} &= S_{\nu 1}\Gamma_{\nu A}\,a_1 + \ldots + (S_{\nu\nu}\Gamma_{\nu A} - 1)a_\nu + \ldots\ldots + S_{\nu n}\Gamma_{\nu A}\,a_n \qquad (95) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= S_{n1}\Gamma_{nA}\,a_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (S_{nn}\Gamma_{nA} - 1)a_n
\end{aligned}
$$

Die Determinante der aus den Koeffizienten der a_ν gebildeten Matrix bezeichnet man mit Δ_S. Aus der ν-ten Zeile von (57) folgt

$$\Gamma_{\nu E} = b_\nu/a_\nu = S_{\nu 1} a_1/a_\nu + \ldots + S_{\nu\nu} + \ldots + S_{\nu n} a_n/a_\nu \qquad (96)$$

und man benötigt zur expliziten Berechnung von $\Gamma_{\nu E}$ die Quotienten a_μ/a_ν ($\mu = 1 \ldots n$). In Analogie zu (22) bzw. (33) bestimmt man zunächst die a_μ aus (95)

$$a_\mu = (-1)^{\nu+\mu-1} a_{0\nu} \Delta_{S\nu\mu}/\Delta_S \qquad \mu = 1 \ldots n \qquad (97)$$

Dabei entsteht $\Delta_{S\nu\mu}$ aus Δ_S durch Streichen der ν-ten Zeile und μ-ten Spalte. (97) liefert die gesuchten Quotienten

$$a_\mu/a_\nu = (-1)^{\nu+\mu} \Delta_{S\nu\mu}/\Delta_{S\nu\nu} \qquad \mu = 1 \ldots n \qquad (98)$$

und nach Einsetzen in (96) lautet das Ergebnis, das die Reflexionsfaktortransformation beschreibt (vergleiche (43), (44))

$$\Gamma_{\nu E} = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\nu+\mu} S_{\nu\mu} \Delta_{S\nu\mu}/\Delta_{S\nu\nu} \qquad 1 \leq \nu \leq n \qquad (99)$$

Die Determinanten in (99) lassen sich nur für n = 2 und 3 leicht angeben. Beim Zweitor gilt

$$\Gamma_{1E} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_{2A}}{1 - S_{22} \Gamma_{2A}} = \frac{S_{11} - \Gamma_{2A} \det(\underline{S})}{1 - S_{22} \Gamma_{2A}} \qquad (100)$$

Den Eingangsreflexionsfaktor Γ_{2E} als Funktion von Γ_{1A} erhält man durch Vertauschen der Indizes 1 und 2. Beim Dreitor gilt

$$\Gamma_{1E} = S_{11} + \frac{\Gamma_{2A} S_{12} (\Gamma_{3A} S_{23} S_{31} + S_{21}(1 - \Gamma_{3A} S_{33})) + \Gamma_{3A} S_{13} (\Gamma_{2A} S_{32} S_{21} + S_{31}(1 - \Gamma_{2A} S_{22}))}{(1 - \Gamma_{2A} S_{22})(1 - \Gamma_{3A} S_{33}) - \Gamma_{2A}\Gamma_{3A} S_{23} S_{32}}$$

$$= \frac{S_{11} - \Gamma_{2A}(S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}) - \Gamma_{3A}(S_{11} S_{33} - S_{13} S_{31}) + \Gamma_{2A}\Gamma_{3A} \det(\underline{S})}{1 - \Gamma_{2A} S_{22} - \Gamma_{3A} S_{33} + \Gamma_{2A}\Gamma_{3A}(S_{22} S_{33} - S_{23} S_{32})} \qquad (101)$$

und man erhält die Reflexionsfaktoren Γ_{2E}, Γ_{3E} aus (101) durch zyklisches Vertauschen des Indextripels (1,2,3).

Zur Vereinfachung der Darstellung wird folgende Schreibweise eingeführt. Die Matrix

$$(\underline{S})_{\nu_1 \cdots \nu_i} \quad ; \quad 1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_i \leq n \quad ; \quad 1 \leq i \leq (n-1) \qquad (102)$$

wird gebildet, indem man in $\underline{S}$ die ν_1-te bis ν_i-te Zeile und Spalte streicht. Damit erhält man aus der n x n - Matrix $\underline{S}$ eine gewisse (n-i)x(n-i)-Matrix. Zum Beispiel gilt für $n \geq 2$

$$(\underline{S})_{2 \cdots n} = S_{11} \qquad (103)$$

Die Gleichungen (100) und (101) lassen sich nun in folgender Form schreiben

Zweitor:
$$\Gamma_{1E} = \frac{\det(\underline{S})_2 - \Gamma_{2A} \det(\underline{S})}{1 - \Gamma_{2A} \det(\underline{S})_1} \qquad (104)$$

Dreitor:
$$\Gamma_{1E} = \frac{\det(\underline{S})_{23} - \Gamma_{2A} \det(\underline{S})_3 - \Gamma_{3A} \det(\underline{S})_2 + \Gamma_{2A}\Gamma_{3A} \det(\underline{S})}{1 - \Gamma_{2A} \det(\underline{S})_{13} - \Gamma_{3A} \det(\underline{S})_{12} + \Gamma_{2A}\Gamma_{3A} \det(\underline{S})_1} \qquad (105)$$

Mit der vereinfachten Schreibweise findet man auch für Viertore nach relativ umständlicher Zwischenrechnung einen geschlossenen Ausdruck analog zu (104) und (105). Aus allen Darstellungen erkennt man ein allgemeines Bildungsgesetz für den Eingangsreflexionsfaktor bei beliebigen n. Ein Beweis (zum Beispiel durch vollständige Induktion) ist bisher nicht geführt worden. Der Grundgedanke der Darstellungen ist die Entwicklung von $\Delta_{S\nu\mu}$ und $\Delta_{S\nu\nu}$ in (99) nach Unterdeterminanten von $\underline{S}$, deren Koeffizienten symmetrisch zur Hauptdiagonalen von $\underline{S}$ liegen. Man bildet die Unterdeterminanten also aus Matrizen des Typs (102). Da die Determinanten selbst erst noch explizit berechnet werden müssen, wenn man die Formeln anwenden will, wird der Rechenaufwand für $n \geq 4$ erheblich.

4. Bestimmung der Eigenschaften eines n-Tors

4.1. Grundsätzliche Probleme

Unter der Voraussetzung der Existenz von $\underline{W}$ oder $\underline{L}$ eines n-Tors besteht die Aufgabe der n-Tor Analyse in der Bestimmung der $W_{\nu\mu}$ bzw. $L_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 1 \ldots n$). Man löst das Problem im Prinzip durch Kurzschluß- und Leerlaufmessungen. Tor ν sei mit einer Eintorquelle verbunden und alle übrigen Tore sollen unbeschaltet sein, d.h. leerlaufen. Gl. (8) entartet dann zu

$$U_\mu = W_{\mu\nu} I_\nu \qquad \mu = 1 \ldots n \tag{106}$$

Hieraus lassen sich alle $W_{\mu\nu}$ bestimmen, wenn man das Experiment für alle ν durchführt und jeweils Eingangsstrom I_ν und Leerlaufspannungen U_μ mißt (U_ν ist natürlich die Eingangsspannung an dem durch den Generator gespeisten Tor). Analog bestimmt man die $L_{\mu\nu}$, indem man am Tor ν mit einem Generator speist und alle übrigen Tore kurzschließt. (9) entartet zu

$$I_\mu = L_{\mu\nu} U_\nu \qquad = 1 \ldots n \tag{107}$$

woraus sich alle $L_{\mu\nu}$ berechnen lassen, wenn man für jedes ν Eingangsspannung U_ν und Kurzschlußströme I_μ mißt (I_ν ist Eingangsstrom). Maximal sind n^2 unbekannte Matrixelemente zu bestimmen. Bei reziproken n-Toren erniedrigt sich die Zahl wegen $\underline{W} = \underline{W}^T$, $\underline{L} = \underline{L}^T$ auf $n(n+1)/2$.

Vergleichbare Messungen zur Bestimmung aller Streumatrixelemente aus (57) sind nicht möglich, da die Leistungswellen a_ν, b_ν nicht direkt gemessen werden können. Man ist also zunächst auf die Berechnung von $\underline{S}$ aus $\underline{W}$ oder $\underline{L}$ mit Hilfe von (65) angewiesen, was unbefriedigend ist.

Im Prinzip ist die n-Tor Analyse zwar auf Strom- und Spannungsmessungen zurückzuführen, das Problem aber nicht vollständig gelöst. Schwerwiegendes Hindernis für eine n-Tor Analyse bei höheren Frequenzen ist die Tatsache, daß Strom- und Spannungs-

messungen nach Betrag und Phase nicht mehr einwandfrei durchführbar sind. Dagegen lassen sich Eingangsimpedanzen,-admittanzen bzw. -reflexionsfaktoren mit großer Genauigkeit bei beliebigen Frequenzen messen, was man zur Grundlage eines allgemein verwendbaren Verfahrens zur Impedanz-, Admittanz- oder Streumatrixbestimmung machen kann. Die Methode wird vom Verfasser in den folgenden Abschnitten explizit entwickelt. Ihr liegen Eingangsmessungen zugrunde, die die Zusammenschaltungsregeln des Abschnitts 1.3. nicht verletzen. Allgemeinere Eingangsmessungen etwa vom Typ Weinbergs (siehe [34], Seite 53) können nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von Impedanz-, Admittanz- oder Streumatrixelementen bieten Brückenschaltungen. Grundsätzlich sind sie nur für eine Zweitoranalyse geeignet, wenn man die Zusammenschaltungsregeln in 1.3. beachtet. Da sich eine n-Tor Analyse im Prinzip stets auf $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ Zweitoranalysen reduzieren läßt, haben auch Brückenmeßmethoden eine nicht zu unterschätzende Bedeutung. ($\binom{n}{2}$ ist die nach den Regeln der Kombinatorik gegebene Anzahl von Möglichkeiten, zwei Tore aus n Stück auszuwählen, die restlichen n-2 Tore müssen geeignet abgeschlossen sein; bei jeder Zweitoranalyse ermittelt man maximal 4 Matrixelemente, die zwei Nichtdiagonalelemente eventuell mit Brückenmeßmethoden). In der vorliegenden Arbeit wird auf die Zuhilfenahme von Brückenmeßmethoden weitgehend verzichtet, da der experimentelle Aufwand erheblich größer, die Genauigkeit im allgemeinen aber kleiner als bei Eingangsreflexionsfaktormessungen ist. Brückenmeßmethoden benutzen einen Zweig einer Brückenschaltung als Vergleichsnormal (das eventuell noch relativ umständlich abgeglichen werden muß), während bei Eingangsmessungen ein Kurzschluß als sehr genau reproduzierbares Vergleichsnormal dient.

Mathematische Grundlage der Bestimmung von n-Tor Eigenschaften aus Eingangsmessungen ist die Impedanz-, Admittanz- bzw. Reflexionsfaktortransformation, d.h. die Gl. (43), (44) bzw. (99). Aus den Überlegungen des Abschnitts 3. ist die größere Bedeutung des Streumatrixformalismus gegenüber anderen Matrixdar-

stellungen deutlich geworden, so daß es für eine spätere praktische Verwendung zweckmäßig erscheint, allein die Reflexionsfaktortransformation zum Ausgangspunkt aller weiteren Überlegungen zu machen. Daher beschränken sich die folgende Abschnitte auf die Bestimmung der Streumatrix von n-Toren.

4.2. Berechnung der Streumatrix aus Eingangsreflexionsfaktoren

4.2.1. Beschreibung der Methode und Realisieren von Abschlüssen

Bei Kenntnis der Ausgangsreflexionsfaktoren $\Gamma_{\mu A}$ ($\mu = 1 \ldots n$, $\mu \neq \nu$) und des zugehörigen Eingangsreflexionsfaktors $\Gamma_{\nu E}$ stellt (99) eine Bestimmungsgleichung für Streumatrixelemente dar. Die Berechnungsmethode besteht darin, aus einer Anzahl von Eingangsreflexionsfaktoren für verschiedene Abschlüsse ein System linear unabhängiger Gleichungen zu bilden, das nach den $S_{\mu\nu}$ auflösbar ist. Bevor darauf näher eingegangen wird, muß geklärt werden, was für Abschlüsse an den Toren $\mu = 1 \ldots n, \mu \neq \nu$, zweckmäßig angebracht werden, wenn man $\Gamma_{\nu E}$ messen will. Zwei Gesichtspunkte sind für die Wahl der Abschlüsse maßgebend. Erstens muß eine experimentelle Reproduzierbarkeit mit großer Präzision gewährleistet sein, und zweitens müssen die zu den Abschlüssen gehörigen $\Gamma_{\mu A}$ möglichst 'einfache' Werte darstellen, damit (99) mathematisch einfach zu behandeln ist. Beide Bedingungen sind für die Fälle Kurzschluß und Leerlauf erfüllt. Der Leerlauffall muß bei höheren Frequenzen eventuell durch eine Reaktanzleitung der Länge $\lambda/4$ mit kurzgeschlossenem Ende realisiert werden, um Abstrahlungsverluste zu vermeiden. Die zugehörigen Ausgangsreflexionsfaktoren sind durch (90) und (92) gegeben.

Für die mathematische Behandlung ist noch der Fall $\Gamma_{\mu A} = 0$, d.h. formale Leistungsanpassung, von besonderem Interesse. Man erhält ihn nach den Bemerkungen in 3.6. durch Abschluß des betrachteten Tores mit seiner Bezugsimpedanz. Leider ist die physikalische Realisierung der Impedanz manchmal problematisch da man oft nur reelle Werte mit großer Genauigkeit für belie-

bige Frequenzen verwirklichen kann. Einen eleganten Ausweg aus diesem praktischen Problem zeigt die in 3.5. besprochene Transformationsmethode. Man verwirklicht die formale Leistungsanpassung zunächst durch Abschluß mit einer reellen Bezugsimpedanz. Mit verschiedenen $\Gamma_{\nu E}$, die bei gewissen Kombinationen von formaler Leistungsanpassung, Kurzschluß und Leerlauf an den übrigen Toren bestimmt wurden, kann man die Streumatrixelemente in bezug auf die reellen Impedanzen(bis auf gewisse Mehrdeutigkeiten)berechnen und anschließend durch Wechsel der Bezugsimpedanzen mit (82) die gewünschte Streumatrix ermitteln.

4.2.2. Streumatrixbestimmung aus Kurzschluß- und formalen Leistungsanpassungsmessungen

Bei allen Überlegungen dieses Abschnitts können statt der Kurzschlußmessungen auch Leerlaufmessungen benutzt werden, es genügt eine der beiden Gruppen. Wegen der größeren Genauigkeit bei sehr hohen Frequenzen, bei denen im Leerlauffall Abstrahlung oder Verluste in den äquivalenten Reaktanzleitungen auftreten, werden jedoch Kurzschlußmessungen verwendet.

4.2.2.1. Reziproke n-Tore

Reziproke n-Tore werden durch eine symmetrische Streumatrix beschrieben, es gilt also $\underline{S} = \underline{S}^T$. Man betrachtet Abb. 9 und wählt als Abschlüsse an den Toren $\mu = 1 \ldots n$ die jeweiligen Bezugsimpedanzen, am Tor ν ist die Innenimpedanz des Generators Bezugsimpedanz. Aus (99) folgt bei $\Gamma_{\mu A} = 0$, $\mu = 1 \ldots n$,

$$\Gamma_{\nu E0} = S_{\nu\nu} \tag{108}$$

wobei der Index 0 die formale Leistungsanpassung aller Tore außer dem ν-ten andeuten soll. Damit sind die $S_{\nu\nu}$ bis auf einen physikalisch nicht relevanten Faktor $\exp(2\pi\varkappa i)$, $\varkappa = 0,1,2,..$ eindeutig bestimmt. Zur Berechnung der Nichtdiagonalelemente wählt man in (99) $\Gamma_{\varkappa A} = 0$, $\varkappa = 1 \ldots n$, $\varkappa \neq \mu$. Der Eingangsrefle-

xionsfaktor am Tor ν als Funktion des Abschlusses am Tor μ bei formaler Leistungsanpassung aller übrigen Tore lautet

$$\Gamma_{\nu E0}(\Gamma_{\mu A}) = S_{\nu\nu} + \frac{S_{\nu\mu}S_{\mu\nu}\Gamma_{\mu A}}{1 - S_{\mu\mu}\Gamma_{\mu A}} \qquad (109)$$

mit $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$ wegen der vorausgesetzten Reziprozität. Die Streumatrix des n-Tors und damit die Formel für den Eingangsreflexionsfaktor werden bei formaler Leistungsanpassung von (n-2) Toren auf die eines Zweitors reduziert. (109) stellt eine Bestimmungsgleichung für $S_{\nu\mu}$ dar, und man wählt $\Gamma_{\mu A} = -\exp(2i\varphi_\mu)$, d.h. Kurzschluß am Tor μ (siehe (92)). Bezeichnet man den zugehörigen Eingangsreflexionsfaktor am Tor ν mit $\Gamma_{\nu EK0}$, so erhält man aus (109)

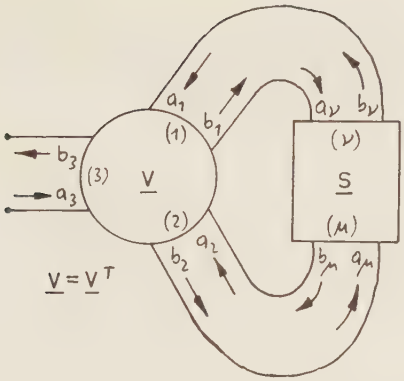
$$S_{\nu\mu} = \pm \sqrt{(S_{\nu\nu} - \Gamma_{\nu EK0})(S_{\mu\mu} + \exp(-2i\varphi_\mu))} \qquad (110)$$

Das Ergebnis ist also zweideutig, d.h. nur bis auf Vielfache von $\exp(\pi i)$ bestimmt. Eine Absolutmessung bis auf Vielfache von $\exp(2\pi i)$ ist in einer Brückenschaltung möglich.

In [34] wird gezeigt, daß sich die Eigenschaften reziproker n-Tore mit Klemmenpaaren als Anschlüssen sogar eindeutig aus Eingangsmessungen bestimmen lassen. Dabei werden jedoch jeweils zwei Klemmen verschiedener Tore als 'Eingang' betrachtet. Messungen dieses Typs lassen sich nicht auf n-Tore mit Wellenleiteranschlüssen verallgemeinern, da sie die Zusammenschaltungsregeln in 1.3. verletzen.

4.2.2.2. Nichtreziproke n-Tore

Die Schwierigkeit gegenüber dem reziproken Fall besteht darin, daß aus (109) nur das Produkt $S_{\nu\mu}S_{\mu\nu}$ ermittelt werden kann, während die Nichtdiagonalelemente selbst nicht zugänglich sind. Zu ihrer Bestimmung war man bisher auf Durchgangsmessungen in Brückenschaltungen angewiesen. Es soll nun ein vom Verfasser entwickeltes neues Verfahren beschrieben werden, mit dessen Hilfe man die Summe der Nichtdiagonalelemente aus einer zusätz-



(Abb. 10: Analyse eines nichtreziproken Zweitors mit Hilfe eines reziproken Dreitors)

lichen Eingangsmessung berechnen kann. Daß das im Rahmen allgemeinerer Eingangsmessungen prinzipiell möglich ist, wird schon in [35] gezeigt.

Man benötigt ein reziprokes Dreitor mit bekannter Streumatrix $\underline{V}$, das als 'Analysator' für die Nichtreziprozität eines zu untersuchenden Zweitors (oder allgemein eines auf die Tore ν und μ reduzierten n-Tors) gelten kann. Ein Prinzipschaltbild der Versuchsanordnung zeigt Abb. 10. Die Bezugsimpedanzen am Tor 1 des Dreitors und am Tor ν des n-Tors sowie am Tor 2 des Dreitors und am Tor μ des n-Tors sollen übereinstimmen, die Tore also mit ihren Bezugsimpedanzen aufeinander passen, damit keine Transformation der Leistungswellen auftritt, die alle Rechnungen unnötig kompliziert macht. Selbstverständlich ist ein Stück homogener, verlustloser Leitung als Verbindung zugelassen, wenn man nur vereinbart, zu welchem Bauelement es als phasentransformierendes Glied hinzuzuzählen ist. Im übrigen sind die für das Zusammenschalten von n-Toren vereinbarten Regeln aus 1.3. vorausgesetzt. Die zu Abb. 10 gehörigen Gleichungssysteme lauten

$$\begin{aligned} b_1 &= V_{11}a_1 + V_{12}a_2 + V_{13}a_3 \\ b_2 &= V_{12}a_1 + V_{22}a_2 + V_{23}a_3 \\ b_3 &= V_{13}a_1 + V_{23}a_2 + V_{33}a_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_\nu &= S_{\nu\nu}a_\nu + S_{\nu\mu}a_\mu \\ b_\mu &= S_{\mu\nu}a_\nu + S_{\mu\mu}a_\mu \end{aligned} \qquad (111)$$

wobei $b_1 = a_\nu$, $b_2 = a_\mu$, $a_1 = b_\nu$ und $a_2 = b_\mu$ gilt. Die nicht gezeichneten (n-2) Tore des n-Tors müssen mit den Bezugsimpedanzen abgeschlossen sein. Aus (111) berechnet man den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 3 des Dreitors

$$\Gamma_{3E} = V_{33} + \frac{1}{\text{Nenner}}\Big[V_{13}^2 S_{\nu\nu} + V_{23}^2 S_{\mu\mu} + V_{13} V_{23}(S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu}) \qquad (112)$$
$$+ (S_{\nu\nu}S_{\mu\mu} - S_{\nu\mu}S_{\mu\nu})(2V_{12} V_{13} V_{23} - V_{13}^2 V_{22} - V_{23}^2 V_{11})\Big]$$

$$\text{Nenner} = 1 - V_{11} S_{\nu\nu} - V_{22} S_{\mu\mu} - V_{12}(S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu})$$
$$+ (S_{\nu\nu}S_{\mu\mu} - S_{\mu\nu}S_{\nu\mu})(V_{11} V_{22} - V_{12}^2)$$

Auflösen nach $(S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu})$ ergibt

$$S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu} = \frac{1}{\text{Nenner}}\Big[-V_{13}^2 S_{\nu\nu} - V_{23}^2 S_{\mu\mu} + (\Gamma_{3E} - V_{33})(1 - V_{11} S_{\nu\nu} - V_{22} S_{\mu\mu})$$
$$+ (S_{\nu\nu}S_{\mu\mu} - S_{\mu\nu}S_{\nu\mu})(V_{11} V_{23}^2 + V_{22} V_{13}^2 - 2V_{12} V_{13} V_{23} + (\Gamma_{3E} - V_{33})(V_{11} V_{22} - V_{12}^2))\Big] \qquad (113)$$

$$\text{Nenner} = V_{12}(\Gamma_{3E} - V_{33}) + V_{13} V_{23}$$

Wenn man voraussetzt, daß $S_{\nu\nu}$, $S_{\mu\mu}$ und $S_{\nu\mu}S_{\mu\nu}$ aus Kurzschluß- und formalen Leistungsanpassungsmessungen bekannt sind, erhält man $S_{\nu\mu}$ und $S_{\mu\nu}$ mit Hilfe von (113) wenigstens bis auf eine Zweideutigkeit in Form einer Vertauschbarkeit. Mit den Abkürzungen $Su = S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu}$, $Pr = S_{\nu\mu}S_{\mu\nu}$ gilt

$$S_{\mu\nu}^2 - Su\, S_{\mu\nu} + Pr = 0 \qquad S_{\nu\mu}^2 - Su\, S_{\nu\mu} + Pr = 0 \qquad (114)$$

$$S_{\nu\mu} = \frac{Su}{2} + \sqrt{\frac{Su^2}{4} - Pr} \qquad S_{\mu\nu} = \frac{Su}{2} - \sqrt{\frac{Su^2}{4} - Pr} \qquad (115)$$

In (115) muß eventuell $S_{\nu\mu}$ mit $S_{\mu\nu}$ vertauscht werden. Eine eindeutige Zuordnung von $S_{\nu\mu}$ und $S_{\mu\nu}$ zu den Lösungen von (114) ist nur möglich wenn man $S_{\nu\mu}$ und $S_{\mu\nu}$ in einer Brückenschaltung mißt. Der Sonderfall der Reziprozität tritt genau dann ein, wenn die Wurzel in (115) verschwindet.

Eine Vereinfachung von (113) erreicht man durch spezielle Wahl der Eigenschaften des reziproken Dreitors. Der Rechenaufwand wird geringer, wenn man ein Bauelement mit möglichst vielen

Symmetrien, d.h. mit möglichst wenigen voneinander verschiedenen Matrixelementen verwendet. Man wählt zunächst ein zyklisch symmetrisches Bauelement, d.h. $V_{11} = V_{22} = V_{33}$, $V_{12} = V_{13} = V_{23}$. Aus (113) folgt

$$S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu} = \frac{1}{V_{12}(\Gamma_{3E} + V_{12} - V_{11})}\Big[- V_{11} + (V_{11}^2 - V_{12}^2)(S_{\nu\nu} + S_{\mu\mu}) + (S_{\nu\nu}S_{\mu\mu} - S_{\mu\nu}S_{\nu\mu})(V_{11} - V_{12})(2V_{12}^2 + (\Gamma_{3E} - V_{11})(V_{11} + V_{12})) + \Gamma_{3E}(1 - V_{11}(S_{\nu\nu} + S_{\mu\mu}))\Big] \qquad (116)$$

Im allgemeinen wird man eine zyklisch symmetrische Streumatrix $\underline{V}$ durch ein der Struktur nach zyklisch symmetrisches Bauelement realisieren. Nun kann man zweckmäßig allen drei Toren die gleiche Bezugsimpedanz Z zuordnen. Falls Z_ν und Z_μ von Z verschieden sind, müssen $S_{\nu\nu}$, $S_{\mu\mu}$ und $S_{\nu\mu}S_{\mu\nu}$ zunächst in bezug auf Z bestimmt worden sein. $S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu}$ und damit auch $S_{\nu\mu}$ und $S_{\mu\nu}$ ergeben sich dann ebenfalls in bezug auf Z. Anschließend kann man durch Transformation mit (82) die ursprünglichen Bezugsimpedanzen Z_ν und Z_μ wieder einführen.

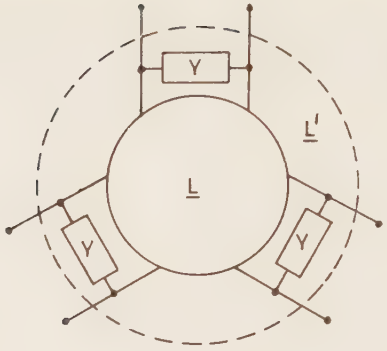
(116) läßt sich noch stärker vereinfachen, wenn das reziproke zyklisch symmetrische Dreitor eine Admittanzmatrix $\underline{L}$ (Elemente L_{11}, $L_{12} = L_{13}$) besitzt. Durch Vorschalten von Queradmittanzen

$$Y = L_{12} - L_{11} + 1/Z^* \qquad (117)$$

nach Abb. 11 entsteht ein Dreitor mit der Admittanzmatrix

$$\underline{L}' = \begin{pmatrix} L_{12} + 1/Z^* & L_{12} & L_{12} \\ L_{12} & L_{12} + 1/Z^* & L_{12} \\ L_{12} & L_{12} & L_{12} + 1/Z^* \end{pmatrix} \qquad (118)$$

Zum Beweis geht man von der Darstellung $\vec{I} = \underline{L}\,\vec{U}$ aus. Nach dem Vorschalten der Admittanzen gilt $\vec{I}' = \underline{L}'\vec{U}'$ mit $\vec{U}' = \vec{U}$ und $I'_\nu - I_\nu = Y U_\nu$ ($\nu = 1,2,3$). Einsetzen von (117) liefert (118). Berechnet man mit Hilfe von (65) die zu $\underline{L}'$ gehörige Streumatrix $\underline{V}'$ in bezug auf Z an allen Toren (Re(Z) = R), so gilt



(Abb. 11: Erweitern eines zyklisch symmetrischen Dreitors $\underline{L}$ durch Vorschalten von Admittanzen Y)

$$\underline{V}' = \begin{pmatrix} V'_{11} & V'_{11} & V'_{11} \\ V'_{11} & V'_{11} & V'_{11} \\ V'_{11} & V'_{11} & V'_{11} \end{pmatrix} \qquad V'_{11} = \frac{-L_{12} Z^{*2}}{2R + 3|Z|^2 L_{12}} \tag{119}$$

Verwendet man ein solches Dreitor als Analysator nichtreziproker n-Tore, so vereinfacht sich (116) zu

$$S_{\nu\mu} + S_{\mu\nu} = 1/V'_{11} - 1/\Gamma_{3E} - S_{\nu\nu} - S_{\mu\mu} \tag{120}$$

was man zur Berechnung von $S_{\nu\mu}$ und $S_{\mu\nu}$ wieder in (115) einsetzt. Für die praktische Anwendung der Methode stellt nur die genaue Realisierung von Y aus (117) eine Schwierigkeit dar. Zweckmäßig ist die Verwendung eines verlustlosen Dreitors $\underline{L}$, dessen Matrixelemente wegen $\underline{L} = \underline{L}^T$ und $\underline{L} = -\underline{L}^{*T}$ (siehe (72)) rein imaginär sind. Mit Hilfe von vorgeschalteten Admittanzen $Y = L_{12} - L_{11}$, die auch rein imaginär sind, realisiert man dann eine Admittanzmatrix mit $L_{11} = L_{12}$. Statt (117) gilt nun $Y = 1/Z^*$, was man speziell für eine reelle Bezugsimpedanz Z sehr leicht realisiert. Die Betrachtung reeller Z genügt, da man mit Hilfe der Transformation (82) nachträglich zu beliebigen Z übergehen kann.

4.2.2.3. Nichtreziproke zyklisch symmetrische Dreitore

Im Unterschied zu allgemeinen nichtreziproken n-Toren lassen sich zyklisch symmetrische Dreitore allein mit Kurzschluß- und formalen Leistungsanpassungsmessungen (bis auf gewisse Mehrdeutigkeiten)analysieren, was im folgenden gezeigt wird.

Man betrachtet Gl. (101) unter Berücksichtigung zyklischer Symmetrie ($S_{11}=S_{22}=S_{33}$, $S_{12}=S_{23}=S_{31}$, $S_{13}=S_{21}=S_{32}$, Bezugsimpedanz Z an allen Toren). Der Eingangsreflexionsfaktor lautet

$$\Gamma_{1E} = \frac{S_{11} - (S_{11}^2 - S_{12}S_{13})(\Gamma_{2A}+\Gamma_{3A}) + (S_{11}^3 + S_{12}^3 + S_{13}^3 - 3S_{11}S_{12}S_{13})\Gamma_{2A}\Gamma_{3A}}{1 - S_{11}(\Gamma_{2A}+\Gamma_{3A}) + (S_{11}^2 - S_{12}S_{13})\Gamma_{2A}\Gamma_{3A}} \qquad (121)$$

Er ist offenbar invariant gegen Vertauschen von Γ_{2A} und Γ_{3A}. Als Abschlüsse an den Toren 2 und 3 verwendet man entweder Kurzschluß (Index K) oder formale Leistungsanpassung (Index O). In Zukunft wird der Eingangsreflexionsfaktor am Tor 1 mit Γ_{AB} bezeichnet, wobei A (= K oder O) den Abschluß am Tor 2 und B (= K oder O) den Abschluß am Tor 3 charakterisiert. Der Index 1 ist wegen der zyklischen Symmetrie überflüssig, und der Index E wird weggelassen, da eine Verwechslung mit Ausgangsreflexionsfaktoren ausgeschlossen ist. Mit (121) berechnet man Γ_{KK}, Γ_{OO} und $\Gamma_{OK}=\Gamma_{KO}$, wobei $\arg(Z)=\varphi$ sei

$$\Gamma_{KK} = \frac{S_{11} + 2(S_{11}^2 - S_{12}S_{13})\exp(2i\varphi) + \det(\underline{S})\exp(4i\varphi)}{1 + 2S_{11}\exp(2i\varphi) + (S_{11}^2 - S_{12}S_{13})\exp(4i\varphi)} \qquad (122)$$

$$\Gamma_{OK} = \frac{S_{11} + (S_{11}^2 - S_{12}S_{13})\exp(2i\varphi)}{1 + S_{11}\exp(2i\varphi)} \qquad (123)$$

$$\Gamma_{OO} = S_{11} \qquad (124)$$

Das Produkt der Nichtdiagonalelemente erhält man aus (123)

$$S_{12}S_{13} = (S_{11} - \Gamma_{OK})(S_{11} + \exp(-2i\varphi)) \qquad (125)$$

Zur Berechnung von S_{12} und S_{13} formt man (122) um

$$S_{12}^3 - (\Gamma_{KK} - S_{11})((S_{11} + \exp(-2i\varphi))^2 - S_{12}S_{13}) - 2S_{12}S_{13}(S_{11} + \exp(-2i\varphi))^2 + S_{13}^3 = 0 \quad (126)$$

und führt zur Abkürzung die Größen x_1 und x_2 ein

$$S_{12}^3 - 2(x_1\Gamma_{KK} + x_2) + S_{13}^3 = 0 \quad (127)$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}((S_{11} + \exp(-2i\varphi))^2 - S_{12}S_{13}) \quad (128)$$

$$x_2 = -x_1S_{11} + S_{12}S_{13}(S_{11} + \exp(-2i\varphi)) \quad (129)$$

Durch Multiplizieren mit S_{12}^3 oder S_{13}^3 erhält man aus (127) zwei identische quadratische Gleichungen in S_{12}^3 oder S_{13}^3, die dritte Potenz des Produkts $S_{12}S_{13}$ sei mit x_3 bezeichnet

$$S_{12(3)}^6 - 2S_{12(3)}^3(x_1\Gamma_{KK} + x_2) + x_3 = 0 \quad (130)$$

$$S_{12}^3 = x_1\Gamma_{KK} + x_2 + (x_1\Gamma_{KK} + x_2)^2 - x_3 \quad (131)$$

$$S_{13}^3 = x_1\Gamma_{KK} + x_2 - (x_1\Gamma_{KK} + x_2)^2 - x_3 \quad (132)$$

Die Zuordnung von S_{12}^3 und S_{13}^3 zu den Lösungen von (130) ist nicht eindeutig. Außerdem sind S_{12} und S_{13} nur bis auf Vielfache von $\exp(2\pi i/3)$ bestimmt, d.h. dreideutig. Das beruht auf der Dreideutigkeit des Eingangsreflexionsfaktors, die sich schon in (121) nachweisen läßt. Dort ist Γ_{1E} invariant gegen Vertauschen des Tripels (S_{11}, S_{12}, S_{13}) mit dem Tripel $(S_{11}, S_{12}\exp(2\pi i/3), S_{13}\exp(-2\pi i/3))$ oder $(S_{11}, S_{12}\exp(-2\pi i/3, S_{13}\exp(2\pi i/3))$. Mit einer Brückenmessung kann Eindeutigkeit bis auf Vielfache von $\exp(2\pi i)$ erzielt und eine Entscheidung darüber gefällt werden, welche der Lösungen von (130) S_{12}^3 und S_{13}^3 zuzuordnen ist.

Abschließend seien noch x_1, x_2 und x_3 als Funktionen von Γ_{OO}, Γ_{OK} und φ angegeben

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{OO})(\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{OK}) \quad (133)$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}(\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{oo})\left[\Gamma_{oo}(2\Gamma_{oo} - 3\Gamma_{ok}) + \exp(-2i\varphi)(\Gamma_{oo} - 2\Gamma_{ok})\right] \quad (134)$$

$$x_3 = (\Gamma_{oo} - \Gamma_{ok})^3\ (\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{oo})^3 \quad (135)$$

4.2.2.4. Nichtreziproke zyklisch symmetrische Viertore

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß auch die zyklisch symmetrischen Viertore zur Klasse der n-Tore gehören, deren Streumatrizen sich (wenigstens bis auf gewisse Mehrdeutigkeiten) aus Kurzschluß- und formalen Leistungsanpassungsmessungen ermitteln lassen. Man behandelt zweckmäßig die Analyse der 'reduzierten' dreizeiligen Streumatrix $\underline{S}_{red}$, die aus der ursprünglichen durch Weglassen der vierten Zeile und Spalte entsteht. Das entspricht einer formalen Leistungsanpassung von Tor 4, d.h. Abschluß mit der (für alle Tore gleichen) Bezugsimpedanz Z

$$\underline{S}_{red} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} \end{pmatrix} \quad (136)$$

Wegen der zyklischen Symmetrie ist die Wahl von Tor 4 für das Anbringen der Bezugsimpedanz keine Beschränkung der Allgemeinheit. Bei Anpassung eines anderen Tores kann man immer so umnumerieren, daß (136) wieder die reduzierte Streumatrix darstellt. Aus (101) und (136) erhält man den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 1 als Funktion von Γ_{2A} und Γ_{3A}

$$\Gamma_{1E} = \frac{S_{11} - \Gamma_{2A}(S_{11}^2 - S_{12}S_{14}) - \Gamma_{3A}(S_{11}^2 - S_{13}^2) + \Gamma_{2A}\Gamma_{3A}\det(\underline{S}_{red})}{1 - (\Gamma_{2A} + \Gamma_{3A})S_{11} + \Gamma_{2A}\Gamma_{3A}(S_{11}^2 - S_{12}S_{14})} \quad (137)$$

Mit der in 4.2.2.3. eingeführten Bezeichnung der Indizes am Eingangsreflexionsfaktor folgt aus (137)

$$\Gamma_{kk} = \frac{S_{11} + \exp(2i\varphi)(2S_{11}^2 - S_{13}^2 - S_{12}S_{14}) + \exp(4i\varphi)\det(\underline{S}_{red})}{1 + 2\exp(2i\varphi)S_{11} + \exp(4i\varphi)(S_{11}^2 - S_{12}S_{14})} \quad (138)$$

$$\Gamma_{ok} = \frac{S_{11} + \exp(2i\varphi)(S_{11}^2 - S_{13}^2)}{1 + \exp(2i\varphi)\, S_{11}} \tag{139}$$

$$\Gamma_{ko} = \frac{S_{11} + \exp(2i\varphi)(S_{11}^2 - S_{12}S_{14})}{1 + \exp(2i\varphi)\, S_{11}} \tag{140}$$

$$\Gamma_{oo} = S_{11} \tag{141}$$

(139) und (140) ergeben Produkte der Nichtdiagonalelemente

$$S_{13}^2 = (\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{oo})(\Gamma_{oo} + \Gamma_{ok}) \tag{142}$$

$$S_{12}S_{14} = (\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{oo})(\Gamma_{oo} + \Gamma_{ko}) \tag{143}$$

Nun formt man zur Berechnung von S_{12} und S_{14} (138) um, wobei $S_{13} \neq 0$ vorausgesetzt werden muß

$$S_{12}^2 - \frac{1}{S_{13}}\Big[(\Gamma_{kk} - S_{11})((\exp(-2i\varphi) + S_{11})^2 - S_{12}S_{14}) + (\exp(-2i\varphi) + S_{11})(S_{13}^2 + S_{12}S_{14})\Big] + S_{14}^2 = 0 \tag{144}$$

Multiplizieren mit S_{12}^2 bzw. S_{14}^2 führt auf zwei identische biquadratische Gleichungen in S_{12} und S_{14}

$$S_{12(4)}^4 - 2S_{12(4)}^2(y_1\Gamma_{kk} + y_2) + y_3 = 0 \tag{145}$$

$$y_1 = \overset{+}{(-)}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{oo}}{\Gamma_{oo} + \Gamma_{ok}}}\,(\exp(-2i\varphi) - \Gamma_{ko}) \tag{146}$$

$$y_2 = \overset{+}{(-)}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{oo}}{\Gamma_{oo} + \Gamma_{ok}}}\Big[\Gamma_{oo}(2(\Gamma_{oo} + \Gamma_{ko}) + \Gamma_{ok}) + \exp(-2i\varphi)(\Gamma_{oo} + \Gamma_{ok} + \Gamma_{ko})\Big] \tag{147}$$

$$y_3 = (\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{oo})^2(\Gamma_{oo} + \Gamma_{ko})^2 \tag{148}$$

$$S_{12}^2 = y_1\Gamma_{kk} + y_2 + \sqrt{(y_1\Gamma_{kk} + y_2)^2 - y_3} \tag{149}$$

$$S_{14}^2 = y_1\Gamma_{kk} + y_2 - \sqrt{(y_1\Gamma_{kk} + y_2)^2 - y_3} \tag{150}$$

(149) und (150) gelten nur bei geeigneter Tornumerierung, d.h. die Zuordnung der Lösungen von (145) zu S_{12}^2 und S_{14}^2 ist nicht eindeutig. S_{12} und S_{14} selbst sind nur bis auf Vielfache von $\exp(\pi i/2)$ bestimmt, da (146) und (147) zweideutig sind (entweder + oder - in beiden Gleichungen) und (149) und (150) nur die Quadrate der Unbekannten liefern.

In (144) muß $S_{13} \neq 0$ vorausgesetzt werden. Die Einschränkung beruht auf der Tatsache, daß (137) für $S_{13} = 0$ keine Bestimmungsgleichung der Art (144) mehr liefert. Leider hat der Fall $S_{13} = 0$ für die Untersuchung von Viertorzirkulatoren große Bedeutung, und man kann die Streumatrixanalyse im Rahmen von Eingangsmessungen dann höchstens auf dem Umweg über eine Impedanz- oder Admittanzmatrixanalyse durchführen, falls eine der beiden Matrizen existiert (siehe 4.2.3.4.).

Die Verfahren von 4.2.2.3. und 4.2.2.4. lassen sich auf zyklisch symmetrische n-Tore mit $n = 3\varkappa$, $4\varkappa$ ($\varkappa = 2,3,4, \ldots$) verallgemeinern. Das beruht auf der Tatsache, daß man ihre Streumatrizen durch formale Leistungsanpassung von (n-3) bzw. (n-4) geeigneten Toren auf zyklisch symmetrische drei- bzw. vierzeilige Matrizen reduzieren kann, auf die die schon besprochenen Analysemethoden anwendbar sind.

4.2.3. Streumatrixbestimmung aus Kurzschluß- und Leerlaufmessungen

4.2.3.1. Beschreibung möglicher Verfahren

Die Analysemethoden des Abschnitts 4.2.2. beruhten im wesentlichen auf Reduktionen der Probleme auf Zwei- oder Dreitoranalysen. Betrachtet man Gl. (99), so erkennt man, daß derartige Reduktionen für $\Gamma_{\mu A} \neq 0$ ($\mu = 2 \ldots n$) nicht möglich sind. Auch wenn man nur Kurzschluß und Leerlauf zuläßt, ergibt sich keine entscheidende Vereinfachung, da (99) immer noch alle zu ermittelnden Unbekannten enthält. Maximal gibt es $N = n^2$ verschiedene Matrixelemente, bei reziproken n-Toren sind es höchstens

$N = n(n+1)/2$. Zur Berechnung der $S_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu = 1,..n$) sind also N linear unabhängige Bestimmungsgleichungen notwendig. Leider enthalten Gleichungen vom Typ (99) nicht nur die Unbekannten selbst, sondern auch gemischte Produkte mit bis zu n Unbekannten als Faktoren. Die Lösung eines Systems von N dieser Gleichungen erscheint daher von vornherein aussichtslos, und man wird einen anderen Weg einschlagen.

Aus den Darstellungen (104) und (105) ist ersichtlich, daß der Eingangsreflexionsfaktor linear in allen ν-reihigen, aus Matrizen der Art (102) gebildeten Unterdeterminanten ist ($\nu = 1...n$), von denen es nach den Regeln der Kombinatorik genau

$$N' = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} \qquad (151)$$

Stück gibt. Es ist möglich, durch Wahl von verschiedenen Abschlüssen (Kurzschluß oder Leerlauf) in (99) und Messen von Eingangsreflexionsfaktoren an allen Toren (zyklisches Vertauschen des Index n-tupels in (99)) N' linear unabhängige Gleichungen zu konstruieren, aus denen man die Werte der Unterdeterminanten bestimmen kann. Die Auflösung nach ihnen bereitet keine Schwierigkeit, da ein lineares System vorliegt. Nun muß nur noch geklärt werden, ob und wie man die Matrixelemente $S_{\mu\nu}$ aus den Unterdeterminanten berechnen kann. Die Hauptdiagonalelemente stellen offenbar genau die einreihigen Unterdeterminanten dar, d.h. Determinanten der Untermatrizen (102) mit $i = n-1$. Die zweireihigen Unterdeterminanten (aus Matrizen (102) mit $i = n-2$) sind von der Form $(S_{\nu\nu}S_{\mu\mu} - S_{\mu\nu}S_{\nu\mu})$, und aus ihnen lassen sich die Produkte der Nichtdiagonalelemente bei Kenntnis der Hauptdiagonalelemente berechnen. Falls $S_{\nu\mu}=S_{\mu\nu}$ gilt (Reziprozität), brauchen keine weiteren Unterdeterminanten explizit berechnet zu werden. Falls das n-Tor nicht reziprok ist, führt eine weitere Berechnung ν-reihiger Unterdeterminanten meistens nicht zu Bestimmungsgleichungen für die $S_{\nu\mu}$ selbst. Das erkennt man bei der Bildung einer dreireihigen Unterdeterminante, die aus der $\varkappa$-ten, ν-ten und μ-ten Zeile und Spalte von $\underline{S}$ bestehen soll

$$\det\begin{pmatrix} S_{\varkappa\varkappa} & S_{\varkappa\nu} & S_{\varkappa\mu} \\ S_{\nu\varkappa} & S_{\nu\nu} & S_{\nu\mu} \\ S_{\mu\varkappa} & S_{\mu\nu} & S_{\mu\mu} \end{pmatrix} = \begin{matrix} S_{\nu\nu}S_{\varkappa\varkappa}S_{\mu\mu} + S_{\varkappa\nu}S_{\nu\mu}S_{\mu\varkappa} + S_{\varkappa\mu}S_{\mu\nu}S_{\nu\varkappa} \\ - S_{\varkappa\varkappa}S_{\nu\mu}S_{\mu\nu} - S_{\nu\nu}S_{\mu\varkappa}S_{\varkappa\mu} - S_{\mu\mu}S_{\nu\varkappa}S_{\varkappa\nu} \end{matrix} \quad (152)$$

Setzt man voraus, daß alle einreihigen und zweireihigen Unterdeterminanten, d.h. Größen der Art $S_{\nu\nu}$, $S_{\nu\mu}S_{\mu\nu}$ ($\nu,\mu = 1 \ldots n$) bekannt sind, so lassen sich aus (152) nur der zweite und dritte Summand als neue Bestimmungsgrößen für die Nichtdiagonalelemente entnehmen, womit nichts gewonnen ist. Bei mehrreihigen Unterdeterminanten ergeben sich stets analoge Produkte mit zyklischen Indexgruppen (aus der expliziten Schreibweise einer Determinante ersichtlich), eine Auflösung nach den Nichtdiagonalelementen selbst ist im allgemeinen unmöglich. Damit ist das Verfahren von vornherein nur auf reziproke n-Tore anwendbar. Ausgenommen von dieser Einschränkung sind Fälle, bei denen auf Grund von Symmetrien mehrere Nichtdiagonalelemente gleich groß sind (siehe 4.2.3.3. und 4.2.3.4.). Für große n ist die Methode auf keinen Fall mehr sinnvoll, weil zur Konstruktion von N' linear unabhängigen Gleichungen N' verschiedene Eingangsreflexionsfaktoren nötig sind, obwohl bei Reziprozität nur höchstens N = n(n+1)/2 Unbekannte vorliegen. Es ist also nicht zuletzt eine Frage der Wirtschaftlichkeit, ob man wesentlich mehr Eingangsreflexionsfaktoren (und damit Gleichungen) als Unbekannte für das Lösungsverfahren benutzen will. In der nachfolgenden Tabelle sind N und N' für verschiedene n dargestellt

n	$N = n(n+1)/2$	$N' = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu}$
2	3	3
3	6	7
4	10	15
5	15	31
6	21	63

N' wächst wesentlich schneller als N, und man sieht ein, daß der Lösungsweg der Bestimmung der Unterdeterminanten und anschließenden Berechnung der Matrixelemente (aus den ein- und

zweireihigen von ihnen) höchstens für $n \leq 3$ praktikabel ist.

Ein bisher nicht aufgeführter Grund ist ausschlaggebend dafür, daß das Verfahren für $n \geq 4$ sicher unzweckmäßig ist. In einer praktisch durchgeführten n-Tor Analyse sind die Eingangsreflexionsfaktoren als Meßgrößen mit Fehlern behaftet, die die Rechenergebnisse maßgeblich beeinflussen. Für $n \geq 4$ macht sich bei der großen Zahl eigentlich überflüssiger und nur verfahrenstechnisch notwendiger Meßgrößen die Fehlerfortpflanzung eventuell sehr störend bemerkbar, und es ist daher unabhängig vom Rechenaufwand nicht günstig, die Unterdeterminanten von $\underline{S}$ zu bestimmen. Natürlich kann die Fehlerfortpflanzung in ungünstigen Fällen das Verfahren auch schon für $n \leq 3$ zusammenbrechen lassen.

Die bisherigen Überlegungen haben gezeigt, daß mit Hilfe von (99) und Kurzschluß oder Leerlauf als Abschlüssen höchstens die Streumatrixanalyse reziproker Zwei- und Dreitore sinnvoll ist. Zur Veranschaulichung wird die Zweitoranalyse im folgenden Abschnitt behandelt. Bei nichtreziproken Zweitoren wird man die Größen S_{11}, S_{22}, $S_{12}S_{21}$ wie bei der Analyse reziproker Zweitore bestimmen und anschließend eine Reflexionsfaktormessung mit einem reziproken Dreitor vornehmen (siehe 4.2.2.2.) Nichtreziproke Drei- und Viertore mit zyklischer Symmetrie nehmen eine Sonderstellung ein (siehe 4.2.3.3. und 4.2.3.4.), da bei ihnen die beschriebene Methode der Unterdeterminantenberechnung auch die gesuchten Matrixelemente (wenigstens bis auf drei- bzw. vierdeutige Phasenfaktoren und Vertauschbarkeiten der Nichtdiagonalelemente) ergibt.

4.2.3.2. Reziproke Zweitore

Die in diesem Abschnitt angegebene Methode der Streumatrixbestimmung stellt nur ein Beispiel aus der großen Zahl von Möglichkeiten der Zweitoranalyse dar und dient der Veranschaulichung des in 4.2.3.1. skizzierten Verfahrens. Man betrachtet die Versuchsanordnung Abb. 9 für $n = 2$, als Abschlüsse an dem

nicht mit dem Generator verbundenen Tor sind nur Kurzschluß und Leerlauf zugelassen. Die möglichen Eingangsreflexionsfaktoren in bezug auf Z_1 und Z_2 ($\arg(Z_1) = \varphi_1$, $\arg(Z_2) = \varphi_2$) lauten nach (100) (Index E der Einfachheit halber weggelassen)

$$\Gamma_{1K} = (S_{11} + \exp(2i\varphi_2)(S_{11}S_{22} - S_{12}^2))/(1 + S_{22}\exp(2i\varphi_2)) \qquad (153)$$

$$\Gamma_{1L} = (S_{11} - (S_{11}S_{22} - S_{12}^2))/(1 - S_{22}) \qquad (154)$$

$$\Gamma_{2K} = (S_{22} + \exp(2i\varphi_1)(S_{11}S_{22} - S_{12}^2))/(1 + S_{11}\exp(2i\varphi_1)) \qquad (155)$$

$$\Gamma_{2L} = (S_{22} - (S_{11}S_{22} - S_{12}^2))/(1 - S_{11}) \qquad (156)$$

Es gibt genau drei Unterdeterminanten von $\underline{S}$ ($\det(\underline{S})$ selbst wieder mitgezählt), die aus Untermatrizen (102) gebildet sind, und man kann sie aus drei der Gleichungen (153) - (156) berechnen. Im Hinblick auf eine praktische Durchführung wählt man zweckmäßig solche Reflexionsfaktoren aus, die bei Kurzschluß gemessen werden, d.h. man verwendet jedenfalls immer (153) und (155). Wählt man als dritte Bestimmungsgleichung (154), so gilt

$$S_{11} = \text{Zähler}(S_{11})/\text{Nenner} \qquad (157)$$

$$S_{22} = \text{Zähler}(S_{22})/\text{Nenner} \qquad (158)$$

$$\text{Zähler}(S_{11}) = \Gamma_{1K}\Gamma_{1L}(1+\exp(-2i\varphi_2)) + \exp(-2i\varphi_1)(\Gamma_{1K}\exp(-2i\varphi_2)+\Gamma_{1L}) + \Gamma_{2K}\exp(-2i\varphi_1)(\Gamma_{1K}-\Gamma_{1L})$$

$$\text{Zähler}(S_{22}) = \Gamma_{2K}\exp(-2i\varphi_1)(1+\exp(-2i\varphi_2)) + \Gamma_{2K}(\Gamma_{1K}\exp(-2i\varphi_2)+\Gamma_{1L}) - \exp(-2i\varphi_2)(\Gamma_{1K}-\Gamma_{1L})$$

$$\text{Nenner} = \exp(-2i\varphi_1)(1+\exp(-2i\varphi_2)) + \Gamma_{1K} + \Gamma_{1L}\exp(-2i\varphi_2) - \Gamma_{2K}(\Gamma_{1K}-\Gamma_{1L})$$

$$S_{11}S_{22} - S_{12}^2 = S_{11} - \Gamma_{1L}(1 - S_{22}) \qquad (159)$$

Aus (159) ergibt sich S_{12}^2 als Funktion von S_{11} und S_{22}

$$S_{12}^2 = (\Gamma_{1L} - S_{11})(1 - S_{22}) \tag{160}$$

woraus S_{12} wenigstens zweideutig ermittelt werden kann. (157), (158) und (160) vereinfachen sich für reelle Bezugsimpedanzen, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, zu

$$S_{11} = \frac{\Gamma_{1L} + \Gamma_{1K} + 2\Gamma_{1K}\Gamma_{1L} + \Gamma_{2K}(\Gamma_{1K} - \Gamma_{1L})}{2 + \Gamma_{1K} + \Gamma_{1L} - \Gamma_{2K}(\Gamma_{1K} - \Gamma_{1L})} \tag{161}$$

$$S_{22} = \frac{\Gamma_{1L} - \Gamma_{1K} + \Gamma_{2K}(2 + \Gamma_{1K} + \Gamma_{1L})}{2 + \Gamma_{1K} + \Gamma_{1L} - \Gamma_{2K}(\Gamma_{1K} - \Gamma_{1L})} \tag{162}$$

$$S_{12}^2 = \frac{2(\Gamma_{1L} - \Gamma_{1K})(1 + \Gamma_{1L})(1 + \Gamma_{1K})(1 - \Gamma_{2K}^2)}{(2 + \Gamma_{1K} + \Gamma_{1L} - \Gamma_{2K}(\Gamma_{1K} - \Gamma_{1L}))^2} \tag{163}$$

4.2.3.3. Nichtreziproke zyklisch symmetrische Dreitore

Mit der in 4.2.2.3. eingeführten Bezeichnungsweise für Eingangsreflexionsfaktoren erhält man aus (121) (Bezugsimpedanz Z an allen Toren, $\arg(Z) = \varphi$)

$$\Gamma_{KK} = \frac{S_{11} + 2\exp(2i\varphi)(S_{11}^2 - S_{12}S_{13}) + \exp(4i\varphi)\det(\underline{S})}{1 + 2\exp(2i\varphi)S_{11} + \exp(4i\varphi)(S_{11}^2 - S_{12}S_{13})} \tag{164}$$

$$\Gamma_{KL} = \frac{S_{11} + (\exp(2i\varphi) - 1)(S_{11}^2 - S_{12}S_{13}) - \exp(2i\varphi)\det(\underline{S})}{1 + (\exp(2i\varphi) - 1)S_{11} - \exp(2i\varphi)(S_{11}^2 - S_{12}S_{13})} \tag{165}$$

$$\Gamma_{LL} = \frac{S_{11} - 2(S_{11}^2 - S_{12}S_{13}) + \det(\underline{S})}{(1 - S_{11})^2 - S_{12}S_{13}} \tag{166}$$

Durch Linearkombination und Umformen erhält man unter Berücksichtigung der Abkürzung $\exp(-2i\varphi) = E$

$$\left[\Gamma_{KK} - \Gamma_{KL} - 1 - E\right](S_{11}^2 - S_{12}S_{13}) + \left[(1-E)\Gamma_{KL} + 2E\Gamma_{KK} - E(1+E)\right] S_{11} = -E(\Gamma_{KL} + E\Gamma_{KK}) \tag{167}$$

$$\left[\Gamma_{LL} - \Gamma_{KL} + 1 + E\right](S_{11}^2 - S_{12}S_{13}) + \left[(1-E)\Gamma_{KL} - 2\Gamma_{LL} - 1 - E\right] S_{11} = -(E\Gamma_{KL} + \Gamma_{LL}) \tag{168}$$

woraus man S_{11} und das Produkt $S_{12}S_{13}$ berechnet

$$S_{11} = \left[\Gamma_{KK}E^2 + \Gamma_{KK}\Gamma_{LL}(E-1) + \Gamma_{LL} + \Gamma_{KL}(\Gamma_{LL} + E(2-\Gamma_{KK})) \right] / \text{Nenner} \quad (169)$$

$$S_{12}S_{13} = (1+E)^2 (E(1-\Gamma_{KK}) + \Gamma_{LL} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL})(\Gamma_{KL}^2 - \Gamma_{KL}(1-E) + \Gamma_{LL} - E\Gamma_{KK} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL}) \; / \; (\text{Nenner})^2 \quad (170)$$

$$\text{Nenner} = (1+E)^2 + (2+E)\Gamma_{LL} - (1+2E)\Gamma_{KK} - 2\Gamma_{KK}\Gamma_{LL} + \Gamma_{KL}(E-1+\Gamma_{KK}+\Gamma_{LL})$$

Nun geht man wie in Abschnitt 4.2.2.3. vor, da (122) und (164) identisch sind. Die Gl. (126) - (132) können direkt übernommen werden, statt (133) - (135) müssen jedoch die x_i (i=1,2,3) als Funktionen von Γ_{KK}, Γ_{KL} und Γ_{LL} ausgedrückt werden. Mit dem Nenner der Gl. (169), (170) gilt

$$x_1 = (1+E)^2 \, K/2(\text{Nenner})^2 \quad (171)$$

$$K = (E+\Gamma_{LL})^2(1+E+\Gamma_{KL}-\Gamma_{KK})^2 - (E(1-\Gamma_{KK}) + \Gamma_{LL} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL})(\Gamma_{KL}^2 - \Gamma_{KL}(1-E) + \Gamma_{LL} - E\Gamma_{KK} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL})$$

$$x_2 = (1+E)^2 \Big[-K(\Gamma_{KK}E^2 + \Gamma_{KK}\Gamma_{LL}(E-1) + \Gamma_{LL} + \Gamma_{KL}(\Gamma_{LL} + E(2-\Gamma_{KK}))) + 2(1+E)(E+\Gamma_{LL})(1+E+\Gamma_{KL}-\Gamma_{KK})(E(1-\Gamma_{KK}) + \Gamma_{LL} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL})(\Gamma_{KL}^2 + \Gamma_{LL} - \Gamma_{KL}(1-E) - E\Gamma_{KK} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL}) \Big] / \; 2(\text{Nenner})^3 \quad (172)$$

$$x_3 = (1+E)^6 (\Gamma_{KL}^2 - \Gamma_{KL}(1-E) + \Gamma_{LL} - E\Gamma_{KK} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL})^3 \; (E(1-\Gamma_{KK}) + \Gamma_{LL} - \Gamma_{KK}\Gamma_{LL})^3 \; / (\text{Nenner})^6 \quad (173)$$

4.2.3.4. Nichtreziproke zyklisch symmetrische Viertore

Analog zu Abschnitt 4.2.2.4. kann man ein Verfahren zur Bestimmung von Streumatrixelementen allein aus Kurzschluß- und Leerlaufmessungen angeben. Es enthält jedoch ebenfalls die Einschränkung, nur auf Bauelemente mit $S_{13} \neq 0$ anwendbar zu sein, da zur Bestimmung von S_{12} und S_{14} wieder Gleichung (144) nötig

ist. Daher löst man das Problem der Streumatrixanalyse auf dem Umweg über eine Impedanz- bzw. Admittanzmatrixanalyse. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachtet man im folgenden nur die Impedanzmatrixdarstellung.

Ein nichtreziprokes zyklisch symmetrisches Viertor wird durch eine Impedanzmatrix der Form

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{14} & W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{13} & W_{14} & W_{11} & W_{12} \\ W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{11} \end{pmatrix} \tag{174}$$

beschrieben. Nun läßt man Tor 4 leerlaufen, so daß man als 'reduzierte' Impedanzmatrix

$$\underline{W}_{red} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{14} & W_{11} & W_{12} \\ W_{13} & W_{14} & W_{11} \end{pmatrix} \tag{175}$$

erhält. Die Auswahl von Tor 4 stellt wegen der zyklischen Symmetrie keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Läßt man ein anderes Tor leerlaufen, so kann man immer so umnumerieren, daß (175) die jeweilige reduzierte Impedanzmatrix darstellt. Die Eingangsimpedanz am Tor 1 bei Abschluß der Tore 2 und 3 mit Z_2 und Z_3 ergibt sich aus (43) mit Hilfe von (175)

$$Z_{1E} = \frac{\det(\underline{W}_{red}) + Z_2(W_{11}^2 - W_{13}^2) + Z_3(W_{11}^2 - W_{12}W_{14}) + Z_2Z_3W_{11}}{(W_{11} + Z_2)(W_{11} + Z_3) - W_{12}W_{14}} \tag{176}$$

Mit einer zu 4.2.2.4. analogen Bezeichnung der Eingangsimpedanzen (Z_{AB} : Eingangsimpedanz am Tor 1 bei Abschluß A an Tor 2 und Abschluß B an Tor 3) gilt

$$Z_{LL} = W_{11} \tag{177}$$

$$Z_{KL} = W_{11} - W_{12}W_{14}/W_{11} \quad ; \quad W_{12}W_{14} = W_{11}(W_{11} - Z_{KL}) \tag{178}$$

$$Z_{LK} = W_{11} - W_{13}^2 / W_{11} \quad ; \quad W_{13}^2 = W_{11}(W_{11} - Z_{LK}) \tag{179}$$

$$Z_{KK} = \frac{1}{W_{11}^2 - W_{12} W_{14}} \left[W_{11}^3 + W_{13}(W_{12}^2 + W_{14}^2) - W_{11}(2W_{12} W_{14} + W_{13}^2) \right] \tag{180}$$

Umformen von (180) ergibt unter der Voraussetzung $W_{13} \neq 0$

$$W_{12}^2 - \frac{1}{W_{13}} \left[(Z_{KK} - W_{11})(W_{11}^2 - W_{12} W_{14}) + W_{11}(W_{12} W_{14} + W_{13}^2) \right] + W_{14}^2 = 0 \tag{181}$$

Einsetzen von (178) und (179) und Multiplizieren mit W_{12}^2 bzw. W_{14}^2 liefert zwei Paare identischer biquadratischer Gleichungen in W_{12} und W_{14}

$$W_{12(4)}^4 \mp \frac{W_{12(4)}^2 W_{11}}{\sqrt{W_{11}(W_{11} - Z_{LK})}} \left[Z_{KK} Z_{KL} + 2W_{11}^2 - W_{11}(2Z_{KL} + Z_{LK}) \right] + W_{11}^2 (W_{11} - Z_{KL})^2 = 0 \tag{182}$$

deren Lösungen unter Berücksichtigung von (177) bei geeigneter Fornumerierung lauten

$$W_{12}^2 = \frac{\sqrt{Z_{LL}}}{2\sqrt{Z_{LL} - Z_{LK}}} \left(\mp k_1 + \sqrt{k_2} \right) \tag{183}$$

$$W_{14}^2 = \frac{Z}{2\sqrt{Z_{LL} - Z_{LK}}} \left(\mp k_1 - \sqrt{k_2} \right) \tag{184}$$

$$k_1 = Z_{KK} Z_{KL} + 2Z_{LL}^2 - Z_{LL}(2Z_{KL} + Z_{LK})$$

$$k_2 = k_1^2 - 4Z_{LL}(Z_{LL} - Z_{LK})(Z_{LL} - Z_{KL})^2$$

Leider enthalten die Ergebnisse eine Fülle von Mehrdeutigkeiten, die alle durch Untersuchungen in Brückenschaltungen beseitigt werden müssen, um die gesuchte Streumatrix anschließend mit (65) bestimmen zu können.

5. Analyse und Synthese von Zirkulatoren

5.1. Definition des idealen n-Tor Zirkulators

Zirkulatoren sind nichtreziproke Bauelemente des HF- und Mikrowellenbereichs und dienen zur richtungsabhängigen Energieverteilung und Signaltrennung. Ihre Wirkungsweise wird aus der nun folgenden formalen Definition deutlich.

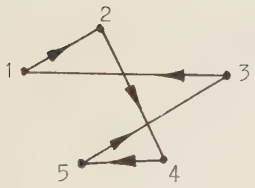
Ein quellenfreies, lineares n-Tor ($n \geq 3$) stellt einen 'idealen Zirkulator' dar, wenn seine Streumatrix die folgenden Bedingungen erfüllt

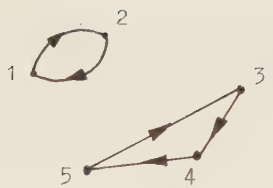
1.) Die Hauptdiagonalelemente von $\underline{S}$ sind sämtlich Null

2.) $\underline{S}$ enthält in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Term $\exp(i\psi_\nu)$, $1 \leq \nu \leq n$, und sonst nur Elemente, die identisch Null sind; damit gilt $|\det(\underline{S})| = 1$.

3.) Die Determinanten aller 'symmetrisch gebildeten' Untermatrizen von $\underline{S}$ (Matrizen des Typs (102)) sind identisch Null, d.h. keine der Matrizen erfüllt Bedingung 2.)

Damit ist eine eindeutige richtungsabhängige Zuordnung von je zwei der n Tore gegeben. Anschaulich wird diese Definition durch eine topologische Darstellung des Leistungsflusses (vergleiche [32]), Man charakterisiert die Tore durch Punkte in einer graphischen Darstellung und verbindet sie durch gerichtete Strecken, die die Nichtdiagonalelemente der Streumatrix repräsentieren. Ein Zirkulator liegt genau dann vor, wenn die Tore durch einen geschlossenen Linienzug verbunden sind. Abb. 12 zeigt als Beispiele topologische Bilder zweier Fünftore, die die Bedingungen 1.) und 2.) erfüllen. Nur eines von ihnen genügt auch der Bedingung 3.) und stellt daher einen idealen Zirkulator dar. Aus der Topologie wird deutlich, daß sich die Streumatrizen von idealen Zirkulatoren durch Umnumerieren der Tore (was einem symmetrischen Vertauschen von Matrixzeilen und -spalten entspricht) stets in die Normalform





$$\underline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{13} & 0 & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{35} \\ 0 & S_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{35} \\ 0 & 0 & S_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

$S_{\nu\mu} = \exp(i\psi_{\nu_1})$ $\qquad$ $S_{\nu\mu} = \exp(i\psi_{\nu_2})$

(Abb. 12: Topologische Veranschaulichung zweier Fünftore mit Streumatrizen $\underline{S}_1$ und $\underline{S}_2$)

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & S_{23} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{n-1,n} \\ S_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} S_{\nu\mu} = \exp(i\psi_\nu) \qquad (185)$$

bringen lassen (siehe [16]), wobei natürlich die Bedingungen 1.) - 3.) nicht verletzt werden. Mit (185) prüft man leicht nach, daß $\underline{S}$ unitär und der vorliegende ideale Zirkulator also verlustlos ist. Diese Eigenschaft ist von der Tornumerierung sicher unabhängig, damit erhält man das Ergebnis, daß jeder ideale Zirkulator verlustlos ist. (Mathematisch gesehen ist die Unitaritätsgleichung $\underline{S}^{*T}\underline{S} = 1$ invariant gegen gleichzeitiges symmetrisches Vertauschen von Zeilen und Spalten in $\underline{S}$ und $\underline{S}^{*T}$).

Bisher ist auf die Bezugsimpedanzen der Streumatrizen idealer Zirkulatoren nicht eingegangen worden. Bei Wellenleiteranschlüssen wählt man zweckmäßig die Feldwellenwiderstände der verlust-

losen Zuleitungen und hat nun die Möglichkeit, durch Vorschalten von Leitungsstücken die Übertragungswinkel ψ_ν in (185) zu variieren. Mit geeigneten Leitungslängen kann man den Fall

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & S_{12} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{12} \\ S_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad S_{12} = \exp(i\psi) \quad (186)$$

realisieren, d.h. eine zyklisch symmetrische Streumatrix herstellen. Bei komplexen Bezugsimpedanzen kann man im Prinzip folgendermaßen vorgehen: zunächst stellt man durch verlustlose Impedanztransformatoren (die höchstens die Übertragungswinkel der Streumatrixelemente ändern) an allen Toren des idealen Zirkulators reelle Bezugsimpedanzen her. Zweckmäßig realisiert man dabei Feldwellenwiderstände verlustloser Wellenleiter. Anschließend verwirklicht man die zyklische Symmetrie wieder durch Vorschalten von Leitungsstücken geeigneter Länge. Bei niederfrequenten n-Toren ist eine Phasentransformation der $S_{\nu\mu}$ in (185) schwieriger, weil die nötigen Leitungen zu lang werden und selbst wieder als Impedanztransformatoren aus konzentrierten Schaltelementen gebaut werden müssen.

Zyklische Symmetrie der Streumatrix bedeutet nach den vorigen Überlegungen keineswegs zyklische Struktursymmetrie des Bauelements und ist nicht charakteristisch für Zirkulatorverhalten. Trotzdem sei in Zukunft immer vorausgesetzt, daß alle betrachteten Zirkulatoren auch von der physikalischen Struktur her zyklisch symmetrisch aufgebaut sind. Dadurch wird die mathematische Behandlung der meisten anfallenden Probleme wesentlich erleichtert, weil für eine an allen Toren gleiche Bezugsimpedanz die Streumatrix automatisch zyklisch symmetrisch wird.

2. Abweichungen vom idealen Verhalten, der reale Zirkulator

n Zukunft sind aktive Bauelemente (Kriterien siehe 3.4.) von llen Betrachtungen ausgeschlossen. Dann kann man Abweichungen m idealen Verhalten eines n-Tor Zirkulators ($\underline{S}$ aus (186)) rch zwei Bedingungen kennzeichnen

.) $\underline{S}$ enthält mehr als n von Null verschiedene Matrixelemente

.) $(\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S})$ ist positiv (semi-) definit

erletzungen der zyklischen Symmetrie seien stets zu vernachlässigen. Um noch von 'Zirkulatoren' sprechen zu können, sollen ie Abweichungen von der Normalform (186) 'klein' sein, was an and der allgemeinen zyklisch symmetrischen Matrix

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots\cdots & S_{1n} \\ S_{1n} & S_{11} & S_{12} & \cdots\cdots & S_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{13} & S_{14} & S_{15} & \cdots\cdots & S_{12} \\ S_{12} & S_{13} & S_{14} & \cdots\cdots & S_{11} \end{pmatrix} \qquad (187)$$

rklärt werden kann. Die Elemente von (187) müssen zunächst

$$|S_{11}|\ ,\ |S_{13}|\ ,\ |S_{14}|\ ,\ \ldots\ ,\ |S_{1n}| \ll |S_{12}| \qquad (188)$$

rfüllen, was die Bedingung 1.) für nichtideales Verhalten einschränkt. Um Bedingungen für 'kleine' Verluste herzuleiten und damit Bedingung 2.) nichtidealen Verhaltens im Hinblick auf eine Definition des 'realen Zirkulators' schärfer zu fassen, muß zunächst ein Überblick über Kriterien für verlustbehaftetes oder verlustloses Verhalten von n-Toren gegeben werden.

Der Einteilung in 3.4., die aus (74) abgeleitet wurde, entnimmt man, daß notwendiges und hinreichendes Kriterium für verlustbehaftetes Verhalten die positive (Semi-) Definitheit der hermiteschen Matrix $(\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S})$ ist. Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß die (notwendig reellen) Eigenwerte größer (oder höchstens gleich) Null sind. 'Kleine'Verluste definiert man

zweckmäßig durch die Bedingung

$$0 \leq \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n \ll 1 \tag{189}$$

wobei die λ_ν Eigenwerte von $(\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S})$ sind und als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det((1 - \lambda)\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S}) = 0 \tag{190}$$

berechnet werden. Bei Verlustlosigkeit ist $\underline{S}$ unitär und die Eigenwerte λ_ν verschwinden trivialerweise.

Weitere notwendige und hinreichende Kriterien für verlustbehaftetes bzw. verlustloses Verhalten von n-Toren ergeben sich aus der Eigenwertgleichung

$$\underline{S}\ \vec{a}_\zeta = \zeta\, \vec{a}_\zeta \tag{191}$$

($\vec{a}_\zeta$ Eigenvektor zum komplexen Eigenwert ζ). Aus den zu den ζ_ν (Nullstellen von $\det(\underline{S} - \zeta\, \underline{1}) = 0$) gehörigen Eigenvektoren konstruiert man eine orthonormale Basis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, nach der man beliebige Vektoren $\vec{a}$ entwickeln kann. Ohne Entartung gilt: $\vec{a}_\nu$ Eigenvektor zu ζ_ν, $1 \leq \nu \leq n$. Damit formt man (74) um in

$$P_A = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2 (1 - |\zeta_\nu|^2)\, |\vec{a}_\nu|^2 \tag{192}$$

Die c_ν sind Entwicklungskoeffizienten von $\vec{a}$ nach den $\vec{a}_\nu$. Bei Entartung braucht (192) nicht geändert zu werden, wenn man die Eigenwerte mit ihrer Vielfachheit zählt. Man erkennt, daß ein n-Tor genau dann verlustlos ist, wenn alle Eigenwerte den Betrag 1 haben. Auftreten von Verlusten bedeutet, daß mindestens ein ζ_ν dem Betrage nach kleiner als 1 ist. Eine zweckmäßige Definition für kleine Verluste lautet

$$|\zeta_\nu| \quad 1 - \varepsilon_\nu \quad ; \quad 0 \leq \varepsilon_\nu \ll 1 \quad ; \quad \nu = 1 \ldots n \tag{193}$$

Legt man den Betrachtungen wieder ein $\underline{S}$ nach (187) zugrunde, so sind 'reale Zirkulatoren' dadurch definiert, daß ihre Streu-

atrizen (188) und (189) bzw. (193) erfüllen. Eine Anwendung er Kriterien bereitet keine Schwierigkeiten, da die Berechnung der Eigenwerte auch für große n nicht kompliziert ist. Bei zyklisch symmetrischen Dreitoren berechnet man als Nullstellen von charakteristischen Polynomen

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= S_{11} + S_{12} + S_{13} \\ \zeta_2 &= S_{11} + S_{12}\exp(+2\pi i/3) + S_{13}\exp(-2\pi i/3) \\ \zeta_3 &= S_{11} + S_{12}\exp(-2\pi i/3) + S_{13}\exp(+2\pi i/3) \end{aligned} \tag{194}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2 - |S_{13}|^2 - 2\mathrm{Re}\left[S_{12}^* S_{11} + S_{11}^* S_{13} + S_{12} S_{13}^*\right] \\ \lambda_2 &= 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2 - |S_{13}|^2 - 2\mathrm{Re}\left[\exp(+2\pi i/3)(\quad " \quad)\right] \\ \lambda_3 &= 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2 - |S_{13}|^2 - 2\mathrm{Re}\left[\exp(-2\pi i/3)(\quad " \quad)\right] \end{aligned} \tag{195}$$

Analog erhält man bei zyklisch symmetrischen Viertoren

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= S_{11} + S_{12} + S_{13} + S_{14} & \zeta_3 &= S_{11} - S_{12} + S_{13} - S_{14} \\ \zeta_2 &= S_{11} + iS_{12} - S_{13} - iS_{14} & \zeta_4 &= S_{11} - iS_{12} - S_{13} + iS_{14} \end{aligned} \tag{196}$$

$\lambda_1 \dots \lambda_4$ ergeben sich, indem man in (196) für jedes $S_{1\nu}$ das entsprechende Element der Matrix $(\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S})$ einsetzt. Das allgemeine Bildungsgesetz der ζ_ν $(1 \le \nu \le n)$ für beliebige n lautet

$$\zeta_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} g_{\nu\mu}\, S_{1\mu} \qquad 1 \le \nu \le n \tag{197}$$

$$g_{\nu\mu} = \exp\left[(\nu - 1)(\mu - 1)2\pi i/n\right]$$

Die λ_ν erhält man aus den ζ_ν durch Ersetzen von $S_{1\mu}$ durch $\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S})_{1\mu}$. Im Anhang ist der Beweis von (197) ausgeführt.

Einige wichtige notwendige Bedingungen für verlustbehaftetes bzw. verlustloses Verhalten erhält man aus (74), wenn man dort in $\underline{S}$ der Form (187) ansetzt. Dann ist auch $\underline{S}^{*T}\underline{S}$ zyklisch symmetrisch, und wegen $(\underline{S}^{*T}\underline{S})^{*T} = \underline{S}^{*T}\underline{S}$ gilt speziell

$$(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{11} = \sum_{\mu=1}^{n} |S_{1\mu}|^2 \tag{198}$$

$$(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1\nu}^* = (\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1\,n+2-\nu} \qquad 2 \le \nu \le n \tag{199}$$

Durch explizites Ausmultiplizieren berechnet man aus (74)

$$P_A = |a_1|^2(1-(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{11}) - a_2a_1^*(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{12} - \ldots\ldots - a_na_1^*(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1n}$$
$$- a_1a_2^*(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1n} + |a_2|^2(1-(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{11}) - \ldots\ldots - a_na_2^*(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1n-1}$$
$$\ldots\ldots \qquad (200)$$
$$- a_1a_n^*(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{12} - a_2a_n^*(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{13} - \ldots\ldots + |a_n|^2(1-(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{11})$$

In dem Schema sind symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegende Summanden wegen (199) konjugiert komplex zueinander. Mit (198) und (199) faßt man wie folgt zusammen

$$P_A = (1 - \sum_{\mu=1}^{n} |S_{1\mu}|^2)\,|\vec{a}|^2 - 2\mathrm{Re}\Big[\sum_{\nu=2}^{n}(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1\nu}\sum_{\mu=\nu}^{n} a_\mu a_{\mu-\nu+1}^*\Big] \geq 0 \qquad (201)$$

(aktives Verhalten ausgeschlossen). Die Ungleichung gilt für beliebige Leistungswellenvektoren, also auch für $a_\nu \neq 0$ ($1 \leq \nu \leq n$) und $a_\mu = 0$ ($\mu = 1\ldots n$, $\mu \neq \nu$), woraus man erhält

$$\sum_{\mu=1}^{n} |S_{1\mu}|^2 \leq 1 \qquad (202)$$

Bei Verlustlosigkeit gilt das Gleichheitszeichen, was aber nicht hinreichend ist. Das $<$ -Zeichen ist dagegen hinreichende Bedingung für verlustbehaftetes Verhalten. Wegen (189) gilt bei 'kleinen' Verlusten

$$\sum_{\mu=1}^{n} |S_{1\mu}|^2 = 1 - \varepsilon \quad , \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1 \qquad (203)$$

weil alle λ_ν den Term ε als Summanden enthalten, der im verlustlosen Fall verschwinden muß.

Als Ergänzung seien noch weitere notwendige Bedingungen für Verlustlosigkeit erwähnt, die man allein aus den Beträgen der Streumatrixelemente erhält. Man betrachtet die Nichtdiagonalelemente von $\underline{S}^{*T}\underline{S}$, die bei Unitarität von $\underline{S}$ verschwinden müssen. Die Bedingung $(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1\nu} = 0$, $2 \leq \nu \leq n$, beschreibt mit den in $(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1\nu}$ enthaltenen n Summanden einen geschlossenen Polygonzug, d.h. ein n-Eck, in der komplexen Zahlenebene. Notwen-

ge Bedingungen für die Existenz des n-Ecks sind, daß jede ntenlänge höchstens so groß wie die Summe der übrigen (n-1) ntenlängen ist. Betrachtet man das Element

$$(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{12} = S_{11}^{*}S_{12} + S_{1n}^{*}S_{11} + S_{1n-1}^{*}S_{1n} + S_{1n-2}^{*}S_{1n-1} + \dots + S_{12}^{*}S_{13} \qquad (204)$$

sind also notwendige Bedingungen für Verlustlosigkeit

$$\begin{aligned}
|S_{11}||S_{12}| &\le |S_{1n}||S_{11}| + |S_{1n-1}||S_{1n}| + |S_{1n-2}||S_{1n-1}| + \dots + |S_{12}||S_{13}| \\
|S_{1n}||S_{11}| &\le |S_{11}||S_{12}| + |S_{1n-1}||S_{1n}| + |S_{1n-2}||S_{1n-1}| + \dots + |S_{12}||S_{13}| \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (205) \\
|S_{12}||S_{13}| &\le |S_{11}||S_{12}| + |S_{1n}||S_{11}| + |S_{1n-1}||S_{1n}| + \dots\dots\dots + |S_{13}||S_{14}|
\end{aligned}$$

enso viele Ungleichungen derselben Form kann man für jedes dere $(\underline{S}^{*T}\underline{S})_{1\nu}$, $3 \le \nu \le n$, aufstellen. Ist mindestens eine von nen nicht erfüllt, so ist der betrachtete n-Tor Zirkulator rlustbehaftet (da aktive Bauelemente ausgeschlossen sind). ne geometrische Veranschaulichung der Ungleichungen für = 3 findet man in [7] und [8].

s soll nun geklärt werden, was ideales oder reales Verhalten ür die Eingangsreflexionsfaktoren von Zirkulatoren bedeutet. us der Normalform (186) ergibt sich, daß alle Eingangsreflexionsfaktoren Γ_{ER}, die bei Abschluß der übrigen (n-1) Tore it Reaktanzen gemessen wurden, dem Betrage nach gleich 1 sein üssen. Das ist schon physikalisch plausibel, weil Bauelement nd Abschlüsse weder aktive noch passive (d.h. verlustbehafte-e) Elemente enthalten. Dagegen verschwinden alle Eingangsreflexionsfaktoren Γ_{EOR}, bei denen mindestens einer der (n-1) eaktanzabschlüsse durch die Bezugsimpedanz ersetzt wird (forale Leistungsanpassung). Anschaulich klar wird das bei Betrachten der topologischen Darstellung des Leistungsflusses. ine an einem Tor einfließende Welle wird zum nächstfolgenden or transportiert. Befindet sich dort ein Reaktanzabschluß, o wird die Welle mit unveränderter Amplitude reflektiert vergleiche (89), $|\Gamma_{VA}| = 1$) und gelangt zum nächsten Tor, be-

steht der Abschluß dagegen aus der Bezugsimpedanz, so liegt Leistungsanpassung vor und der Leistungsfluß 'endet' an diesem Tor. Da alle Tore durch einen einfach geschlossenen Linienzug verbunden sind, gelangt die zu Beginn eingespeiste Leistungswelle stets an das mit der Bezugsimpedanz abgeschlossene Tor. Einen mathematischen Beweis der vorigen Überlegungen führt man leicht durch Einsetzen von (185) in (99). Die dortigen Determinanten lassen sich wegen der einfachen Gestalt von (185) direkt angeben. Als Ergebnis erhält man bei idealem Verhalten des n-Tor Zirkulators

$$|\Gamma_{ER}| = 1 \qquad \Gamma_{EOR} = 0 \tag{206}$$

während bei realem Verhalten offenbar gilt

$$|\Gamma_{ER}| = 1 - \varepsilon \quad , 0<\varepsilon<<1 \; , \quad |\Gamma_{EOR}|<<1 \tag{207}$$

5.3. Streumatrixanalyse realer Dreitorzirkulatoren

Die Untersuchungen von 4.2.2.3. und 4.2.3.3. sollen für die Analyse realer Zirkulatoren modifiziert werden, woraus sich neue Näherungsformeln ergeben. Die auftretenden Eingangsreflexionsfaktoren (siehe (122) - (124) und (164) - (166)) müssen wegen (207) die Bedingungen

$$|\Gamma_{KK}|, |\Gamma_{KL}|, |\Gamma_{LL}| = 1 - \varepsilon_\nu, \; 0<\varepsilon_\nu<<1, \; \nu = 1,2,3; \; |\Gamma_{OO}|, |\Gamma_{OK}| << 1 \tag{208}$$

erfüllen. S_{12} und S_{13} bestimmt man aus (131) und (132) in 4.2.2.3. mit den dort angegebenen Mehrdeutigkeiten, wenn man für die x_i (i=1,2,3) jeweils (133) - (135) oder (171) - (173) ansetzt. Aus (133) - (135) erhält man mit (208)

$$x_1 = \tfrac{1}{2} \exp(-2i\varphi)(\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{OO} + \Gamma_{OK}) + \ldots . \tag{209}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2} \exp(-4i\varphi)(\Gamma_{OO} - 2\,\Gamma_{OK}) + \ldots . \tag{210}$$

$$x_3 = \exp(-6i\varphi)(\Gamma_{OO} - \Gamma_{OK})^3 + \ldots . \tag{211}$$

x_1 enthält Terme 0-ter, erster und höherer Ordnung, x_2 Terme ter und höherer Ordnung und x_3 Terme dritter und höherer rdnung. Nun schreibt man (131) und (132) in der Form

$$S^3_{12(3)} = x_1\Gamma_{KK} + x_2 \pm x_1\Gamma_{KK}\sqrt{1 + \frac{2\,x_2}{x_1\Gamma_{KK}} + \frac{x_2^2 - x_3}{x_1^2\Gamma_{KK}^2}} \qquad (212)$$

nd entwickelt die Wurzel bis zu Gliedern dritter Ordnung

$$S^3_{12(3)} = x_1\Gamma_{KK} + x_2 \pm (x_1\Gamma_{KK} + x_2 - x_3/\Gamma_{KK}) \qquad (213)$$

ieraus berechnet man mit (209) - (211) Näherungen erster rdnung von S_{12} und S_{13}

$$S_{12} \approx \exp(-4i\varphi/3)\Gamma_{KK}^{\frac{1}{3}}\Big[1 + \tfrac{1}{3}\Big[\Gamma_{OO}(\exp(2i\varphi) + \frac{1}{\Gamma_{KK}}) + \Gamma_{OK}(\exp(2i\varphi) - \frac{2}{\Gamma_{KK}})\Big]\Big] \qquad (214)$$

$$S_{13} \approx \exp(-2i\varphi)\Gamma_{KK}^{-\frac{1}{3}}(\Gamma_{OO} - \Gamma_{OK}) \qquad (215)$$

ie natürlich nur bei geeigneter Tornumerierung gelten.

ur Herleitung analoger Näherungsformeln aus (213) mit Hilfe on (171) - (173) ist eine Zusatzüberlegung notwendig, da die edingung $|\Gamma_{ER}| = 1$ zur Beschreibung idealen Zirkulatorverhalens nicht ausreicht. Man betrachtet die Normalform (186) für - 3 und berechnet Γ_{KK}, Γ_{KL} und Γ_{LL} aus (121) ($S_{11} = S_{13} = 0$)

$$\Gamma_{KK}\exp(-4i\varphi) = -\Gamma_{KL}\exp(-2i\varphi) = \Gamma_{LL} = S^3_{12} \qquad (216)$$

bweichungen vom idealen Verhalten kann man durch eine Veretzung des Zusammenhangs (216) definieren. Man bildet zwei rößen δ_1 und δ_2

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \Gamma_{KK}\exp(-4i\varphi) + \Gamma_{KL}\exp(-2i\varphi)\\ \delta_2 &= \Gamma_{KL}\exp(-2i\varphi) + \Gamma_{LL}\end{aligned} \qquad (217)$$

ie im Idealfall verschwinden, bei realen Zirkulatoren aber on Null verschieden sind. Aus später ersichtlichen Gründen

definiert man 'kleine' Abweichungen vom idealen Verhalten zweckmäßig durch die Angaben

$$|\delta_1| \ll |1 - \Gamma_{KK}| \quad ; \quad |\delta_2| \ll |\exp(2i\varphi) + \Gamma_{KK}| \tag{218}$$

Deshalb sei auch

$$\Gamma_{KK} \neq 1, \; -\exp(2i\varphi) \tag{219}$$

vorausgesetzt, was eine gewisse 'Entartung'des Meßobjekts bedeuten würde. Im Falle $\Gamma_{KK} = 1$ hätte der Zirkulator die Eigenschaft einer kurzgeschlossenen $\lambda/4$-Reaktanzleitung und im Fall $\Gamma_{KK} = -\exp(2i\varphi)$ die Eigenschaft einer kurzgeschlossenen Reaktanzleitung der Länge

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan\left(-\frac{2|Z|}{R_W} \sin\varphi\right) \tag{220}$$

wobei R_W der Wellenwiderstand der Leitung und $Z = |Z| \exp(i\varphi)$ die Bezugsimpedanz des Zirkulators ist. (220) leitet man aus dem Eingangsreflexionsfaktor Γ_E (in bezug auf Z, siehe (83)) einer kurzgeschlossenen Reaktanzleitung mit Wellenwiderstand R_W her

$$\Gamma_E = \frac{iR_W \tan(2\pi l/\lambda) - Z^*}{iR \tan(2\pi l/\lambda) + Z} \tag{221}$$

indem man $\Gamma_E = -\exp(2i\varphi)$ setzt und nach l auflöst. Die beiden durch (219) mit Gleichheitszeichen beschriebenen Fälle sind also denkbar, sollen aber in Zukunft ausgeschlossen werden.

Setzt man Definition (217) in (171) - (173) ein, so kann man die x_i (i=1,2,3) als Funktionen von Γ_{KK}, δ_1 und δ_2 berechnen und unter der Voraussetzung (218) in erster Näherung abschätzen. Die etwas umständliche Rechnung ergibt mit der Abkürzung $E = \exp(-2i\varphi)$

$$S_{11} = \frac{1}{(1+E)^2}\left(\frac{\delta_1}{1 - \Gamma_{KK}} + \frac{\delta_2}{1 + E\Gamma_{KK}}\right) + \ldots\ldots \tag{222}$$

$$\times \quad \frac{E^2}{2} + \frac{1}{2(1+E)^2}\left[\frac{\delta_1 E(2+E)}{1 - \Gamma_{KK}} + \frac{\delta_2 E(1-2E^2(1-E))}{1 + E\Gamma_{KK}}\right] + \ldots\ldots \tag{223}$$

$$x_2 = \frac{E}{2(1+E)^2}\left[\frac{E\delta_2}{1+E\Gamma_{KK}} - \frac{\delta_1(2+E)}{1-\Gamma_{KK}}\right] + \ldots. \quad (224)$$

$$x_3 = \frac{1}{(1+E)^6}\left[\frac{E\delta_2}{1+E\Gamma_{KK}} - \frac{\delta_1}{1-\Gamma_{KK}}\right] + \ldots. \quad (225)$$

Bezugsimpedanzen haben immer einen nichtverschwindenden Realteil, so daß $\varphi \neq -\pi/2, \pi/2$ und damit $E \neq -1$ ist. Die Genauigkeit von (222) - (225) hängt jedoch stark von φ ab, wenn es sich nur wenig von $-\pi/2$ oder $\pi/2$ unterscheidet, da alle nicht aufgeführten Glieder höherer Ordnung Potenzen von $1/(1+E)^2$ enthalten. Eine Vernachlässigung ist nur möglich, wenn

$$|\delta_1|, |\delta_2| \ll |1 + \exp(-2i\varphi)| \quad (226)$$

gilt. Unter der Annahme, daß die Genauigkeit der ersten Näherungen von S_{11}, x_1 und x_2 sowie der dritten Näherung von x_3 in (222) - (225) ausreichend ist, berechnet man mit (213) Näherungen erster Ordnung von S_{12} und S_{13}

$$S_{12} \approx E^{\frac{2}{3}}\Gamma_{KK}^{\frac{1}{3}}\left[1 + \frac{1}{3(1+E)^2}\left[\delta_2\left(\frac{1}{E\Gamma_{KK}} - \frac{2E(1-E)}{1+E\Gamma_{KK}}\right) - \delta_1\frac{2+E}{E\Gamma_{KK}}\right]\right] \quad (227)$$

$$S_{13} \approx \frac{1}{\Gamma_{KK}^{\frac{1}{3}}(1+E)}\left[\frac{E\delta_2}{1+E\Gamma_{KK}} - \frac{\delta_1}{1-\Gamma_{KK}}\right] \quad (228)$$

Einsetzen von Definition (217) in (222), (227) und (228) gibt

$$S_{11} \approx \frac{1}{(1+E)^2}\left[\frac{\Gamma_{KK}E^2 + \Gamma_{KL}E}{1-\Gamma_{KK}} + \frac{\Gamma_{KL}E + \Gamma_{LL}}{1+E\Gamma_{KK}}\right] \quad (229)$$

$$S_{12} \approx E^{\frac{2}{3}}\Gamma_{KK}^{\frac{1}{3}}\left[1 + \frac{1}{3E\Gamma_{KK}(1+E\Gamma_{KK})(1+E)^2}\left[\Gamma_{LL} - \Gamma_{KL}E(1+E)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \Gamma_{KK}(\Gamma_{LL}E(1-2E(1-E)) - \Gamma_{KL}E^2(1+3E-2E^2) - E^2(2+E)(1+E\Gamma_{KK}))\right]\right] \quad (230)$$

$$S_{13} \approx \frac{E}{\Gamma_{KK}^{\frac{1}{3}}(1+E)^2(1-\Gamma_{KK})(1+E\Gamma_{KK})}\left[\Gamma_{LL} + \Gamma_{KL}(E-1) - \Gamma_{KK}(E(1+E\Gamma_{KK})\right.$$

$$\left. + 2E\Gamma_{KL} + \Gamma_{LL})\right] \quad (231)$$

Günstig für eine praktische Verwendung sind die Formeln bei

reeller Bezugsimpedanz. Für $\varphi = 0$ gilt

$$S_{11} \approx \frac{1}{4(1 - \Gamma_{KK}^2)} \left[\Gamma_{KK}^2 + \Gamma_{KL} + \Gamma_{LL} + \Gamma_{KK}(\Gamma_{KK} - \Gamma_{LL})\right] \quad (232)$$

$$S_{12} \approx \Gamma_{KK}^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{12\Gamma_{KK}}(\Gamma_{LL} - 2\Gamma_{KL})\right] \quad (233)$$

$$S_{13} \approx \frac{1}{4\Gamma_{KK}^{\frac{1}{3}}(1 - \Gamma_{KK}^2)} \left[\Gamma_{LL} - \Gamma_{KK}(1 + \Gamma_{KK} + 2\Gamma_{KL} + \Gamma_{LL})\right] \quad (234)$$

Eine Kontrolle der Brauchbarkeit der Lösungen (232) - (234) ist mit Hilfe von (188) und (202) möglich.

5.4. Zirkulatorsynthese

5.4.1. Das Problem der Streumatrixsynthese

In den Abschnitten 5.1. - 5.3. wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß zumindest reale Zirkulatoren physikalisch realisierbar sind und daher Gegenstand einer praktischen Untersuchung sein können. Tatsächlich ist jedoch die Verwirklichung eines Bauelements mit einer vorgegebenen Streumatrix ein Kernproblem der Netzwerk- oder speziell der n-Tor-Theorie, das der Synthese von Bauelementen mit vorgeschriebenen Leistungsübertragungseigenschaften entspricht. Die Entwicklung von Verfahren zur n-Tor Analyse ist aber neben einer Behandlung des Syntheseproblems keineswegs von untergeordneter Bedeutung, sondern sogar unbedingt notwendig. Ohne geeignete Analysemethoden läßt sich nicht prüfen, ob ein Bauelement tatsächlich die Realisierung einer Streumatrix darstellt oder nicht, und man kann daher den Problemkreis der Streumatrixanalyse als notwendigen Teil des umfassenderen Aufgabenbereichs der Streumatrixsynthese ansehen. Im folgenden wird ein grober Überblick über gebräuchliche Syntheseverfahren gegeben und danach das Problem der Zirkulatorsynthese im HF- und Mikrowellenbereich behandelt.

Eine Einteilung der Möglichkeiten zur n-Tor Synthese bei vorgegebener Streumatrix kann man nach folgenden Gesichtspunkten vornehmen

1.) Netzwerktheoretische Synthese aus konzentrierten Elementen

2.) Verwirklichung vorgeschriebener Symmetrien und Eigenwerte der Streumatrix

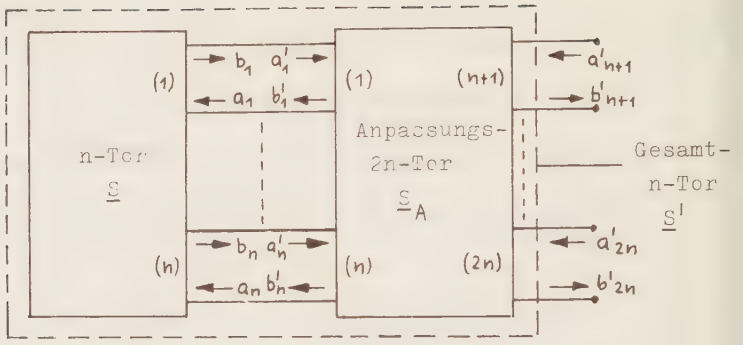
3.) Streumatrixsynthese mit Hilfe von Anpassungs-2n-Toren

4.) Streumatrixsynthese durch Bezugsimpedanzwechsel

Die Verfahren 2.) - 4.) zeichnen sich durch größere Allgemeinheit gegenüber der netzwerktheoretischen Synthese aus. Sie haben besondere Bedeutung für höhere Frequenzen, bei denen die konzentrierten Schaltelemente der Netzwerktheorie entweder nicht mehr als 'konzentriert' (d.h. unabhängig von den übrigen Teilen der Schaltung und klein gegen die Wellenlänge) angesehen werden können oder neue frequenzabhängige Eigenschaften aufweisen, die bei niedrigen Frequenzen nicht auftreten. Leider ist die Verwirklichung vorgeschriebener Symmetrien und Eigenwerte von $\underline{S}$ eine nur auf verlustlose Bauelemente anwendbare Methode (vergleiche z. B. [2]), und bisher ist keine Möglichkeit gefunden worden, die Berücksichtigung von Verlusten in das Verfahren miteinzubeziehen. Daher werden vom Verfasser nur die Verfahren 3.) und 4.) besprochen und eingehend auf das Problem der Dreitorzirkulatorsynthese angewendet.

1.4.2. Streumatrixsynthese mit Hilfe von Anpassungs-2n-Toren

Der Grundgedanke bei dem nun zu besprechenden Verfahren ist die Transformation der Eigenschaften eines gegebenen n-Tors durch ein Anpassungs-2n-Tor in ein neues n-Tor mit der zu realisierenden Streumatrix. Das Syntheseproblem wird damit auf das Anpassungs-2n-Tor verlagert. Abb. 13 zeigt die Prinzipschaltung, wobei die in 1.3. aufgeführten Bedingungen für das Zusammenschalten erfüllt sein müssen. Die gezeichnete Konfigu-



(Abb. 13: Streumatrixtransformation $\underline{S} \rightarrow \underline{S}'$ durch Anpassungs-2n-Tor)

ration ist ein Spezialfall von noch allgemeineren Zusammenschaltungen, wie sie z.B. in [1] behandelt werden.

Die Transformation des Realisierungsproblems auf ein 2n-Tor scheint von vornherein ungünstig, da die Synthese eines 2n-Tors im allgemeinen schwieriger als die eines n-Tors sein wird. Für viele Probleme genügen jedoch reziproke Anpassungs-2n-Tore, die stets leichter zu verwirklichen sind. In günstigen Situationen läßt sich die Struktur des 2n-Tors vereinfachen, im Extremfall kann es z.B. zu n Zweitoren entarten, wodurch die Syntheseaufgabe wesentlich erleichtert wird.

Nun soll an Hand von Abb. 13 $\underline{S}'$ als Funktion von $\underline{S}_A$ und $\underline{S}$ berechnet werden. Dazu betrachtet man die Definitionsgleichung $\vec{b}' = \underline{S}_A \vec{a}'$ von $\underline{S}_A$ und schreibt sie in der Form

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \\ b'_{n+1} \\ \vdots \\ b'_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_1 & \underline{S}_2 \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \\ a'_{n+1} \\ \vdots \\ a'_{2n} \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_A = \begin{pmatrix} \underline{S}_1 & \underline{S}_2 \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_4 \end{pmatrix} \qquad (235)$$

mit n-reihigen Untermatrizen $\underline{S}_i$ (i=1...4). Nach Abb. 13 gilt außerdem

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \underline{S} \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \tag{236}$$

womit man (235) in die folgende Gestalt bringt

$$(\underline{1} - \underline{S}_1\underline{S}) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \underline{S}_2 \begin{pmatrix} a'_{n+1} \\ \vdots \\ a'_{2n} \end{pmatrix} \tag{237}$$

$$\begin{pmatrix} b'_{n+1} \\ \vdots \\ b'_{2n} \end{pmatrix} = \underline{S}_3\underline{S} \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} + \underline{S}_4 \begin{pmatrix} a'_{n+1} \\ \vdots \\ a'_{2n} \end{pmatrix} \tag{238}$$

Löst man (237) nach $(b'_1 \ \ldots \ b'_n)^T$ auf und setzt das Ergebnis in (238) ein, so erhält man $(b'_{n+1} \ \ldots \ b'_{2n})^T$ als Funktion von $(a'_{n+1} \ \ldots \ a'_{2n})^T$. Nach Abb. 13 sind diese Vektoren durch

$$\begin{pmatrix} b'_{n+1} \\ \vdots \\ b'_{2n} \end{pmatrix} = \underline{S}' \begin{pmatrix} a'_{n+1} \\ \vdots \\ a'_{2n} \end{pmatrix} \tag{239}$$

verknüpft, so daß man durch Koeffizientenvergleich erhält

$$\underline{S}' = \underline{S}_4 + \underline{S}_3\underline{S}(\underline{1} - \underline{S}_1\underline{S})^{-1}\underline{S}_2 = \underline{S}_4 + \underline{S}_3(\underline{S}^{-1} - \underline{S}_1)^{-1}\underline{S}_2 \tag{240}$$

Auflösen von (240) nach $\underline{S}$ liefert

$$\underline{S} = (\underline{S}_1 + \underline{S}_2(\underline{S}' - \underline{S}_4)^{-1}\underline{S}_3)^{-1} \tag{241}$$

Bei gegebenem $\underline{S}$ und $\underline{S}'$ sind (240) und (241) Bestimmungsgleichungen für die $\underline{S}_i$ (i=1..4). Für reziproke Anpassungs-2n-Tore ($\underline{S}_A$ symmetrisch) gilt wegen (235)

$$\underline{S}_1, \ \underline{S}_4 \ \text{ symmetrisch}; \quad \underline{S}_2 = \underline{S}_3^T \tag{242}$$

und die Lösungsmannigfaltigkeit für (240) bzw. (241) ist kleiner. Eine weitere Einteilung der $\underline{S}_A$ ist nach Symmetrieklassen möglich. Falls Invarianz gegen gleichzeitiges Spiegeln der Tore 1 und (n+1), 2 und (n+2), ... , n und 2n an der Symmetrieebene des Anpassungs-2n-Tors vorliegt, spricht man von

'Klappsymmetrie'

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_4 \quad , \quad \underline{S}_2 = \underline{S}_3 \tag{243}$$

Dafür müssen natürlich jeweils gleiche Bezugsimpedanzen an den Toren 1 und (n+1), 2 und (n+2), ... , n und 2n vorausgesetzt werden. Der Begriff 'Symmetrie' wird vermieden, weil er nur bei Zweitoren mit einer Symmetrie der Matrix übereinstimmt.

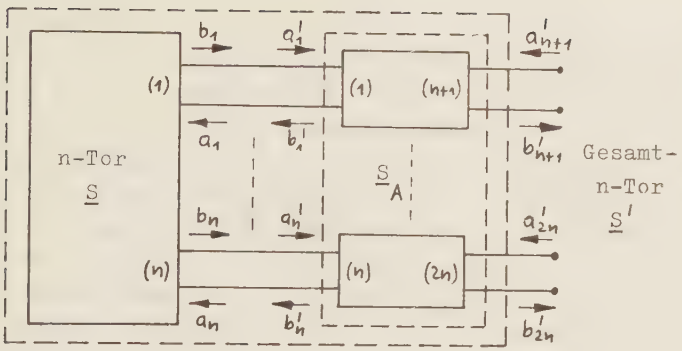
Für eine Zirkulatorsynthese erscheinen Anpassungs-2n-Tore mit einer besonderen Art von zyklischer Symmetrie bedeutungsvoll. Betrachtet man die Tornummern 1...n und (n+1)...2n jeweils als Ketten, deren Glieder bei zyklischem Vertauschen um einen Platz weiterrücken, so soll 'zyklische Symmetrie' des 2n-Tors die Invarianz gegen synchrones zyklisches Vertauschen der beiden Ketten von Tornummern bedeuten, d.h. Invarianz von $\underline{S}_A$ bei zyklischer Permutation der Torpaare (1,n+1), (2,n+2), ... (n,2n). Die Untermatrizen $\underline{S}_i$ haben dann die Eigenschaft

$$\underline{S}_1 \, , \, \underline{S}_2 \, , \, \underline{S}_3 \, , \, \underline{S}_4 \quad \text{zyklisch symmetrisch (im Sinne von (187))} \tag{244}$$

Besonders wichtig ist die Gruppe von Anpassungs-2n-Toren, die sich in eine Anzahl m ($2 \leq m \leq n$) voneinander unabhängiger Teile zerlegen läßt, da sich der für eine Synthese nötige Aufwand erheblich verringert. Im Extremfall m = n besteht das 2n-Tor aus n Zweitoren, die jeweils die Tore (1,n+1), (2,n+2), ... (n,2n) miteinander verbinden (Abb. 14). Die Untermatrizen von $\underline{S}_A$ haben nach (235) die Form

$$\underline{S}_i = \begin{pmatrix} S_{(i)1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{(i)n} \end{pmatrix} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{245}$$

Für i = 1 und i = 4 stellen die Diagonalelemente die Eingangsreflexionsfaktoren an den Toren 1...n und n+1 ...2n dar, bei i = 2, 3 geben sie die Kopplungskoeffizienten zwischen den Toren 1 und n+1, 2 und n+2 usw. an. Alle anderen Matrixelemente von $\underline{S}_A$ müssen verschwinden, da n voneinander unabhängige Zwei-



(Abb. 14: Streumatrixtransformation $\underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$
durch n Zweitore)

tore vorliegen. Jedes von ihnen besitzt eine Streumatrix

$$\begin{pmatrix} S_{(1)\mu} & S_{(2)\mu} \\ S_{(3)\mu} & S_{(4)\mu} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \mu \leq n \qquad (246)$$

Es soll nun untersucht werden, ob man aus zyklisch symmetrischen n-Toren mit Hilfe eines Anpassungs-2n-Tors der Art (245) (d.h. mit n Zweitoren) Zirkulatoren der Normalform (186) herstellen kann. Zunächst liest man aus (240) ab, daß $\underline{S}'$ notwendig symmetrisch ist, wenn $\underline{S}$ symmetrisch ist. Das bedeutet, daß eine Zirkulatorsynthese höchstens aus nichtreziproken n-Toren möglich sein kann, falls sie überhaupt durchführbar ist. Außerdem müssen die $\underline{S}_i$ in (245) die Bedingung (244) erfüllen, weil $\underline{S}$ (ursprüngliches n-Tor) und $\underline{S}'$ (Zirkulator in der Darstellung (186)) zyklisch symmetrisch sind. Um die Frage der Verluste vorerst auszuklammern, nimmt man an, daß in (186) für ein reelles c $(0 < c \leq 1)$ $S_{12} = c \exp(i\psi)$ gilt. Damit ist ausgedrückt, daß der Zirkulator passiv und nur in bezug auf die Verteilungsrichtung der Leistung ideal ist.

Ein nichtreziprokes, zyklisch symmetrisches n-Tor wird durch n komplexe Zahlen charakterisiert. Das Anpassungs-2n-Tor enthält wegen (244) und (245) höchstens vier voneinander unabhän-

gige Parameter, und die Gesamtschaltung wird durch S_{12} beschrieben, so daß insgesamt nur fünf 'Variable' zur Verfügung stehen, um (240) bzw. (241) zu erfüllen. Eventuell hinreichende Bedingung für eine Zirkulatorsynthese ist also $n \leq 5$. Bei reziprokem Anpassungs-2n-Tor erniedrigt sich die Zahl der freien Parameter um 1, und eine Synthesemöglichkeit ist nur für $n \leq 4$ wahrscheinlich. Falls außerdem noch Klappsymmetrie von $\underline{S}_A$ (Symmetrie der Zweitore) vorliegt, gilt sogar $n \leq 3$. Mit den genannten Einschränkungen für n ist noch nichts darüber ausgesagt, ob eine Zirkulatorsynthese tatsächlich möglich ist, das muß vielmehr erst mit (240) oder (241) explizit nachgeprüft werden.

Für n = 5 erhält man aus (241) ($S_{(i)}$ Elemente von $\underline{S}_i$, i =1,2,3,4)

$$\underline{S}^{-1} = \underline{S}_1 + \frac{S_{(2)}S_{(3)}}{S_{12}^5 - S_{(4)}^5}\,\underline{\tilde{S}} \qquad (247)$$

$$\underline{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} S_{(4)}^4 & S_{12}S_{(4)}^3 & S_{12}^2S_{(4)}^2 & S_{12}^3S_{(4)} & S_{12}^4 \\ S_{12}^4 & S_{(4)}^4 & S_{12}S_{(4)}^3 & S_{12}^2S_{(4)}^2 & S_{12}^3S_{(4)} \\ S_{12}^3S_{(4)} & S_{12}^4 & S_{(4)}^4 & S_{12}S_{(4)}^3 & S_{12}^2S_{(4)}^2 \\ S_{12}^2S_{(4)}^2 & S_{12}^3S_{(4)} & S_{12}^4 & S_{(4)}^4 & S_{12}S_{(4)}^3 \\ S_{12}S_{(4)}^3 & S_{12}^2S_{(4)}^2 & S_{12}^3S_{(4)} & S_{12}^4 & S_{(4)}^4 \end{pmatrix}$$

Eine Zirkulatorsynthese wäre (von günstigen Zufällen abgesehen) nur denkbar, wenn durch Variation der $S_{(i)}$ (i=1..4) und von S_{12} beliebige zyklisch symmetrische $\underline{S}^{-1}$ (und damit auch $\underline{S}$ mit $\det(\underline{S}) \neq 0$) dargestellt werden können. Wegen der speziellen Form von (247) ist eine Darstellung vorgeschriebener Matrixelemente von $\underline{S}^{-1}$ nur für das Diagonalelement und eines der Nichtdiagonalelemente durchführbar, die anderen Nichtdiagonalelemente sind dann bereits festgelegt. Eine Fünftorzirkulatorsynthese aus nichtreziproken zyklisch symmetrischen Fünftoren mit fünf Anpassungszweitoren ist daher ausgeschlossen, wenn man von günstigen Zufällen absieht.

Analog zu (247) berechnet man aus (241) für n = 4

$$\underline{S}^{-1} = \underline{S}_1 + \frac{S_{(2)}S_{(3)}}{S_{12}^4 - S_{(4)}^4}\,\underline{\tilde{S}} \qquad (248)$$

$$\underline{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} S_{(4)}^3 & S_{12}S_{(4)}^2 & S_{12}^2 S_{(4)} & S_{12}^3 \\ S_{12}^3 & S_{(4)}^3 & S_{12}S_{(4)}^2 & S_{12}^2 S_{(4)} \\ S_{12}^2 S_{(4)} & S_{12}^3 & S_{(4)}^3 & S_{12}S_{(4)}^2 \\ S_{12}S_{(4)}^2 & S_{12}^2 S_{(4)} & S_{12}^3 & S_{(4)}^3 \end{pmatrix}$$

Mit der gleichen Überlegung wie bei Fünftoren sieht man ein, daß eine Viertorzirkulatorsynthese aus nichtreziproken, zyklisch symmetrischen Viertoren mit vier Anpassungszweitoren sehr unwahrscheinlich ist.

Der Fall n = 3 wird in Abschnitt 5.4.4. behandelt.

5.4.3. Streumatrixsynthese durch Bezugsimpedanzwechsel

Zu Beginn des Abschnitts 3.5. war bereits darauf hingewiesen worden, daß der Streumatrixformalismus Möglichkeiten für eine Synthese von n-Tor Eigenschaften bietet, wenn man die Bezugsimpedanzen als freie Parameter (unabhängig von einer aktuellen Wahl von Abschlüssen) betrachtet. Das Problem der n-Tor Synthese zu vorgegebenen Abschlüssen und Leistungsübertragungsverhalten versucht man durch Suche nach einem Satz von Bezugsimpedanzen zu lösen, für den schon vorhandene n-Tore die gewünschte Streumatrix besitzen. Das Syntheseproblem ist dann auf die Aufgabe der Impedanztransformation der vorgegebenen Abschlüsse in die nötigen Bezugsimpedanzen verlagert.

Eine Lösung der angedeuteten Aufgabe ist leider sehr unwahrscheinlich, da zur Variation von n^2 komplexen Elementen der Streumatrix des n-Tors durch Ändern der Bezugsimpedanzen nur n komplexe Parameter zur Verfügung stehen. Eine Synthese von Zirkulatoren aus gewissen verlustlosen, nichtreziproken, zyklisch symmetrischen Dreitoren scheint jedoch möglich, was man durch folgende Überlegung einsieht: zyklisch symmetrische Drei-

tore werden durch S_{11}, S_{12}, S_{13} charakterisiert. Bei Verlustlosigkeit ist $\underline{S}$ unitär und es gilt daher

$$|S_{11}|^2+|S_{12}|^2+|S_{13}|^2 = 1 \tag{249}$$

$$\mathrm{Re}(S_{11}S_{13}^*+S_{12}S_{11}^*+S_{13}S_{12}^*) = 0 \;;\; \mathrm{Im}(S_{11}S_{13}^*+S_{12}S_{11}^*+S_{13}S_{12}^*) = 0 \tag{250}$$

so daß nur drei reelle Größen (Beträge von zwei Matrixelementen, Phase von einem Matrixelement) übrig bleiben. Die zu realisierende Streumatrix (186) enthält im verlustlosen Fall einen Parameter, nämlich den Übertragungswinkel ψ. Durch die (an allen Toren gleiche) Bezugsimpedanz stehen zwei weitere Parameter (Real- und Imaginärteil von Z) zur Verfügung. Die Bedingung, daß die Anzahl der Parameter und der Größen der vorgegebenen n-Tore höchstens gleich sein dürfen, ist also erfüllt. Zu beweisen wäre nun, daß die genannte Bedingung für eine Zirkulatorsynthese auch hinreichend ist. Man prüft also, ob Gl. (82) für n = 3 unter den Voraussetzungen zyklischer Symmetrie aller Matrizen, der Unitarität von $\underline{S}$ und einem $\underline{S}'$ der Art (186) widerspruchsfrei lösbar ist. Eine explizite Rechnung findet man in [26]. In Abschnitt 5.4.4. wird stattdessen das Problem der Synthese realer, d.h. verlustbehafteter Dreitorzirkulatoren behandelt.

Die Streumatrizen verlustloser, nichtreziproker, zyklisch symmetrischer Viertore sind aus maximal vier verschiedenen reellen Größen aufgebaut, was man mit Hilfe der Unitaritätsgleichungen einsieht. Da sich die Zahl der freien Parameter zur Transformation in eine Matrix (186) gegenüber dem Dreitorfall nicht ändert, ist eine Zirkulatorsynthese durch Bezugsimpedanzwechsel im allgemeinen ausgeschlossen, d.h. ohne weitere Voraussetzungen über das zugrundeliegende $\underline{S}$ nicht möglich.

Für die Verwendung von n-Toren in der Praxis ist meistens eine Leistungsanpassung an reelle Impedanzen von Generatoren, Verbrauchern und Zuleitungen erwünscht. Bei einer Streumatrixrealisierung treten aber oft komplexe Bezugsimpedanzen auf, so daß verlustlose Impedanztransformatoren nötig sind, um die

gewünschten Leistungsübertragungseigenschaften für reelle Bezugsimpedanzen zu verwirklichen. Damit wird eine gewisse Äquivalenz der Synthese durch Bezugsimpedanzwechsel und der im vorigen Abschnitt behandelten Synthese durch n Anpassungszweitore deutlich. Im nächsten Abschnitt werden die Unterschiede beider Methoden am Beispiel der Synthese realer Dreitorzirkulatoren behandelt.

5.4.4. Dreitorzirkulatorsynthese

In [16] wird nachgewiesen, daß aus gewissen nichtreziproken, verlustlosen Dreitoren durch drei reziproke, symmetrische und verlustlose Anpassungszweitore (vergleiche Abb. 14) mit geeigneten Eigenschaften Zirkulatoren realisiert werden können. Das analoge Problem der Zirkulatorsynthese durch Bezugsimpedanzwechsel wird ausführlich in [26] behandelt. Der in der Praxis so bedeutsame Fall der Synthese realer Zirkulatoren aus gewissen verlustbehafteten Dreitoren wird zum ersten Mal in [28] von Schwartz bearbeitet. Dabei wird jedoch der Impedanzmatrixformalismus benutzt und nur auf eine Synthese mit Bezugsimpedanzwechsel (also mit verlustlosen Impedanztransformatoren) eingegangen. In einer Schaltung nach Abb. 14 (n = 3) können bei realen (passiven) Bauelementen Verluste sowohl im Dreitor als auch in den Anpassungstransformatoren auftreten. Vom Standpunkt des Bezugsimpedanzwechsels betrachtet stellt sich das Problem von Verlusten der Anpassungstransformatoren zunächst nicht. Es soll daher im ersten Teil dieses Abschnitts geklärt werden, wie sich die Verluste des zugrundeliegenden Dreitors auf eine Zirkulatorsynthese auswirken.

Die Eigenschaften eines passiven, nichtreziproken, zyklisch symmetrischen Dreitors seien durch

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{13} & S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{13} & S_{11} \end{pmatrix} \text{ in bezug auf } \underline{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R \; ; \; R > 0 \qquad (251)$$

gegeben. Mit Gl. (82) berechnet man $\underline{S}'$ in bezug auf die (an allen Toren gleiche) Impedanz $Z' = R' + i\,X'$, wobei der Fall $Z' = R$ von vornherein ausgeschlossen sein soll. Die Matrixelemente von $\underline{S}'$ lauten dann

$$S'_{11} = D\left[\det(\underline{S}) + S_{11}\left[\frac{R+Z'}{R-Z'}\right]^2 + 2\,\frac{R+Z'}{R-Z'}\left(S_{11}^2 - S_{12}S_{13}\right) + \frac{R-Z'^*}{R+Z'^*}\left[\left[\frac{R+Z'}{R-Z'} + S_{11}\right]^2 - S_{12}S_{13}\right]\right] \tag{252}$$

$$S'_{12} = D\left[\frac{R+Z'}{R-Z'} - \frac{R-Z'^*}{R+Z'^*}\right]\left[S_{12}\,\frac{R+Z'}{R-Z'} + S_{11}S_{12} - S_{13}^2\right] \tag{253}$$

$$S'_{13} = D\left[\frac{R+Z'}{R-Z'} - \frac{R-Z'^*}{R+Z'^*}\right]\left[S_{13}\,\frac{R+Z'}{R-Z'} + S_{11}S_{13} - S_{12}^2\right] \tag{254}$$

$$D = \frac{R+Z'^*}{(R-Z')\det\left[(\underline{1}+\underline{S})R + (\underline{1}-\underline{S})Z'\right]}$$

Die im Nenner von D auftretende Determinante muß von Null verschieden vorausgesetzt werden (vergleiche (81)). Der Fall $Z' = -R$ kann wegen der geforderten Passivität von Bezugsimpedanzen nicht vorkommen.

Wichtigstes Anliegen bei der Dreitorzirkulatorsynthese ist eine ideale Sperrdämpfung zweier benachbarter Tore. Strebt man die Normalform (186) an, so soll ein Bezugsimpedanzwechsel vor allem $S_{13}' = 0$ ergeben. Die dazu nötige Bezugsimpedanz berechnet man mit (254)

$$Z' = R\left[1 - \frac{2\,S_{13}}{S_{12}^2 + S_{13}(1 - S_{11})}\right] \tag{255}$$

Einsetzen in (252) - (254) liefert

$$S'_{11} = \frac{(S_{12}^2 + S_{13}(1-S_{11}))\left[S_{12}S_{13}^* - (S_{12}^{*2} - S_{11}^*S_{13}^*)(S_{13}^2 - S_{11}S_{12})\right]}{(S_{12}^{*2} + S_{13}^*(1-S_{11}^*))\qquad (S_{12}^3 - S_{13}^3)} \tag{256}$$

$$S'_{12} = \frac{(S_{12}^2 + S_{13}(1-S_{11}))\left[|S_{12}^2 - S_{11}S_{13}|^2 - |S_{13}|^2\right]}{(S_{12}^{*2} + S_{13}^*(1-S_{11}^*))\qquad (S_{12}^3 - S_{13}^3)} \tag{257}$$

$$S'_{13} = 0 \tag{258}$$

Falls das ursprüngliche n-Tor verlustlos ist, gilt

$$|S^3_{12} - S^3_{13}| = |S_{12}|^2 - |S_{13}|^2 \tag{259}$$

$$S_{12} S^*_{13} - (S^{*2}_{12} - S^*_{11} S^*_{13})(S^2_{13} - S_{11} S_{12}) = 0 \tag{260}$$

$$|S^2_{12} - S_{11} S_{13}|^2 = |S_{12}|^2; \quad |S^2_{13} - S_{11} S_{12}|^2 = |S_{13}|^2 \tag{261}$$

was man durch mehrmaliges Anwenden von (249) und (250) beweist. Einsetzen in (256) - (258) ergibt die Streumatrix

$$\underline{S}' = \begin{pmatrix} 0 & S'_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S'_{12} \\ S'_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |S'_{12}| = 1 \tag{262}$$

d.h. einen idealen Zirkulator der Form (186). Ist das ursprüngliche n-Tor dagegen verlustbehaftet, so erhält man einen realen Zirkulator nach (188), (189) und (193) für

$$|S'_{11}| \ll |S'_{12}| \ , \quad |1 - |S'_{11}|^2 - |S'_{12}|^2| \ll 1 \ ,$$

$$|S'_{11} + \exp(2\pi\varkappa i/3) S'_{12}| = 1 - \varepsilon_\varkappa , \quad 0 \leq \varepsilon_\varkappa \ll 1 \ , \ \varkappa = 0,1,2 \tag{263}$$

Ein durch die Passivität des Dreitors gegebener Zusammenhang von $|S'_{11}|$ und $|S'_{12}|$ wird noch in (288) behandelt.

Nun muß noch die bisher nicht berücksichtigte Frage beantwortet werden, ob Z' in (255) passiv (d.h. mit $\mathrm{Re}(Z') > 0$) realisierbar ist. Nur dann ist an eine technische Verwirklichung zu denken, und man kann die Frage daher auch als Hauptproblem der Zirkulatorsynthese ansehen. Als notwendige und hinreichende Bedingung für $\mathrm{Re}(Z') > 0$ erhält man aus (255)

$$\left| \frac{Z' - R}{Z' + R} \right| = \frac{|S_{13}|}{|S^2_{12} - S_{11} S_{13}|} < 1 \tag{264}$$

Bei Verlustlosigkeit gilt wegen (261)

$$\left|\frac{Z' - R}{Z' + R}\right| = \frac{|S_{13}|}{|S_{12}|} < 1 \qquad (265)$$

Einen Zirkulator der Normalform (186) kann man dann nur für $|S_{13}| < |S_{12}|$ herstellen (vergleiche [26]). Im verlustbehafteten Fall erreicht man $S'_{13} = 0$, d.h. zirkulatorähnliches Verhalten, nach (264) nur für $|S_{13}| < |S_{12}^2 - S_{11}S_{13}|$ mit passiver Bezugsimpedanz. Ob die Ungleichung erfüllt ist, kann man schon bis zu einem gewissen Grad allein aus $|S_{11}|, |S_{12}|$ und $|S_{13}|$ erkennen, wenn man den Ausdruck $|S_{12}^2 - S_{11}S_{13}|$ nach unten abschätzt

$$\left||S_{12}|^2 - |S_{11}||S_{13}|\right| \leq |S_{12}^2 - S_{11}S_{13}| \qquad (266)$$

(264) ist sicher erfüllt für die Fälle

$$2|S_{13}| < |S_{12}|^2 \leq 1, \quad 0 \leq |S_{11}| < 1 \qquad (267)$$

$$|S_{13}| < |S_{12}|^2 \leq 2|S_{13}|, \quad 0 \leq |S_{11}| < \frac{|S_{12}|^2}{|S_{13}|} - 1 \qquad (268)$$

weil dann $|S_{13}|$ kleiner als die linke Seite von (266) ist. In allen übrigen Fällen müssen die Phasen der Streumatrixelemente mitberücksichtigt werden.

Ein neuer Aspekt ergibt sich dadurch, daß man im Unterschied zu (255) mit einer Bezugsimpedanz

$$Z' = R\left(1 - \frac{2S_{12}}{S_{13}^2 + S_{12}(1 - S_{11})}\right) \qquad (269)$$

den Fall $S'_{12} = 0$ verwirklicht. Alle weiteren Überlegungen können von vorher übernommen werden, wenn man S_{12} durch S_{13} ersetzt und umgekehrt. Die beiden Fälle unterscheiden sich also nur durch ihren Drehsinn. Für eine Zirkulatorsynthese muß bei Verlustlosigkeit nun die Normalform

$$\underline{S}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S'_{13} \\ S'_{13} & 0 & 0 \\ 0 & S'_{13} & 0 \end{pmatrix} \qquad |S'_{13}| = 1 \tag{270}$$

zugrundegelegt werden. Notwendige und hinreichende Bedingung für $\mathrm{Re}(Z') > 0$ ist statt (264)

$$\left| \frac{Z' - R}{Z' + R} \right| = \frac{|S_{12}|}{|S_{13}^2 - S_{11} S_{12}|} < 1 \tag{271}$$

Durch Kombination von (264) und (271) erhält man das Ergebnis, daß passive, zyklisch symmetrische Dreitore mit

$$|S_{12}| \geq |S_{13}^2 - S_{11} S_{12}| \quad \text{und} \quad |S_{13}| \geq |S_{12}^2 - S_{11} S_{13}| \tag{272}$$

eine Zirkulatorsynthese mit passiver Bezugsimpedanz nicht ermöglichen. Zum Beispiel gehören Dreitore mit $S_{11} = 0, |S_{12}| = 0{,}4$ $|S_{13}| = 0{,}3$ offenbar zu dieser Klasse. Nach (195) sind die Eigenwerte von $(\underline{1} - \underline{S}^{*T}\underline{S})$ größer Null. Auf die physikalische Realisierbarkeit soll hier nicht eingegangen werden.

echnisch kann man eine Bezugsimpedanz (255) oder (269) nur mit ndlicher Genauigkeit verwirklichen. Ein Fehler bewirkt insbeondere, daß S'_{13} bzw. S'_{12} nun nicht mehr verschwindet. Eine äherungslösung für kleine Änderungen vom Fall (255) oder (269) cheint zwar möglich, der Rechenaufwand steht aber in keinem erhältnis zur exakten Lösung (253) oder (254). Brauchbare Näerungen für verlustlose Dreitore sind von Schwartz in [29] erechnet worden.

n dem nun folgenden Teil dieses Abschnitts wird die Zirkulatorynthese unter dem Aspekt der Realisierung von drei geeigneten npassungszweitoren behandelt. Man betrachtet Abb. 14 ($n = 3$) nd nimmt an, daß die Anordnung zyklisch symmetrisch sei. Die npassungszweitore seien reziprok und Z die Bezugsimpedanz alr in Abb. 14 gezeichneten Tore. Die Streumatrizen der Zweire sollen mit

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \tau \\ \tau & \rho_2 \end{pmatrix} \tag{273}$$

bezeichnet werden, so daß das 'Anpassungssechstor' die Streumatrix

$$\underline{S}_A = \begin{pmatrix} \underline{S}_1 & \underline{S}_2 \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \rho_1 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \tau \\ \hline \tau & 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & \rho_2 \end{array}\right) \tag{274}$$

besitzt. Für $\underline{S}$ aus (251) berechnet man mit (240) und (274) ein zyklisch symmetrisches $\underline{S}'$ mit den Elementen

$$S'_{11} = \rho_2 + \frac{\tau^2}{\det(\underline{S}^{-1} - \underline{S}_1)} \left[((\underline{S}^{-1})_{11} - \rho_1)^2 - (\underline{S}^{-1})_{12} (\underline{S}^{-1})_{13} \right] \tag{275}$$

$$S'_{12} = \frac{\tau^2}{\det(\underline{S}^{-1} - \underline{S}_1)} \left[(\underline{S}^{-1})^2_{13} - (\underline{S}^{-1})_{12} ((\underline{S}^{-1})_{11} - \rho_1) \right] \tag{276}$$

$$S'_{13} = \frac{\tau^2}{\det(\underline{S}^{-1} - \underline{S}_1)} \left[(\underline{S}^{-1})^2_{12} - (\underline{S}^{-1})_{13} ((\underline{S}^{-1})_{11} - \rho_1) \right] \tag{277}$$

$$(\underline{S}^{-1})_{11} = \frac{S_{11}^2 - S_{12} S_{13}}{\det(\underline{S})} \qquad (\underline{S}^{-1})_{1\nu} = \frac{S_{1\mu}^2 - S_{11} S_{1\nu}}{\det(\underline{S})} \qquad \begin{matrix} \nu = 2, \mu = 3 \\ \text{oder} \\ \nu = 3, \mu = 2 \end{matrix}$$

$\underline{S}^{-1}$ existiert sicher, wenn das Bauelement nur kleine Verluste hat, weil $|\det(\underline{S})|$ dann nur wenig von 1 verschieden ist. Man verifiziert sehr leicht, daß für

$$\rho_1 = (\underline{S}^{-1})_{11} - \frac{(\underline{S}^{-1})^2_{12}}{(\underline{S}^{-1})_{13}} = \frac{S_{13}}{S_{11} S_{13} - S_{12}^2} \tag{278}$$

gerade S'_{13} verschwindet. Unabhängig davon kann man durch ein geeignetes τ ein gewünschtes S'_{12} mit (276) herstellen und schließlich den letzten Parameter ρ_2 mit (275) so bestimmen, daß S'_{11} verschwindet. Bei symmetrischen Anpassungszweitoren

($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) tritt dieser Fall gerade für

$$\tau^2 = \left[\frac{(\underline{S}^{-1})_{13}^2}{(\underline{S}^{-1})_{12}} - \frac{(\underline{S}^{-1})_{12}^2}{(\underline{S}^{-1})_{13}} \right] \rho = \frac{S_{13}(S_{12}^3 - S_{13}^3)}{(S_{11}S_{13} - S_{12}^2)^2 (S_{11}S_{12} - S_{13}^2)} \quad (279)$$

ein, die Gleichungen (275) - (277) lauten dann

$$S'_{11} = S'_{13} = 0 \quad (280)$$

$$S'_{12} = \frac{(\underline{S}^{-1})_{11}(\underline{S}^{-1})_{13}}{(\underline{S}^{-1})_{12}} - (\underline{S}^{-1})_{12} = \frac{S_{13}}{S_{11}S_{12} - S_{13}^2} \quad (281)$$

Für den Fall, daß das ursprüngliche Dreitor verlustlos ist, kann man $\underline{T}$ unitär wählen (Beweis durch Einsetzen von (259) - (261) in (278), (279)). Man erhält also insgesamt das Ergebnis, daß man nichtreziproke, zyklisch symmetrische Dreitore unter Umständen durch geeignete Anpassungszweitore (273) so transformieren kann, daß das um die Zweitore erweiterte Dreitor eine Streumatrix der Form (186) bekommt. (Wegen der Passivität des zugrundeliegenden Dreitors wird der Betrag des Übertragungskoeffizienten jedoch von 1 verschieden und bei zusätzlicher Passivität der Zweitore natürlich kleiner als 1). Bei einer Synthese durch Bezugsimpedanzwechsel ist das nur im verlustlosen Fall, d.h. für unitäres $\underline{S}$ möglich. Genau dann stimmen die Ergebnisse (278), (279) mit den Berechnungen in [16] überein.

Beschränkt man sich auf die Aufgabe, eine Zirkulatorsynthese nur mit einem verlustbehafteten Dreitor durchzuführen, so bleiben die wichtigen Fragen zu beantworten, ob die erforderlichen Anpassungszweitore passiv realisierbar sind und inwiefern die dort auftretenden Verluste den Übertragungskoeffizienten $|S'_{12}|$ aus (276) (oder speziell (281)) so verkleinern, daß eine derartige Synthese nicht sinnvoll ist und man lieber ein $S'_{11} \neq 0$ beim Bezugsimpedanzwechsel in Kauf nimmt, weil $|S'_{12}|$ nach (257) größer ist.

Zur passiven Realisierbarkeit muß geprüft werden, ob die Matrix ($\underline{E} - \underline{T}^{*T} \underline{T}$) positiv (semi-) definit wird, d.h. ihre Eigenwerte

größer (oder höchstens gleich) Null sind

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}(|\rho_1|^2+|\rho_2|^2) - |\tau|^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(|\rho_1|^2-|\rho_2|^2)^2+|\rho_1^*\tau+\rho_2\tau^*|^2} \geq 0 \tag{282}$$

Notwendig (aber nicht hinreichend) dafür ist bei $|\tau|>0$

$$|\rho_1|, |\rho_2| < 1 \; ; \; |\tau| \leq 1 \tag{283}$$

Mit (278) muß man also vor allem prüfen, ob zumindest (283) erfüllt ist. Ist das nicht der Fall, so ist eine Synthese mit $S'_{13} = 0$ von vornherein ausgeschlossen. Eventuell besteht jedoch die Möglichkeit einer Zirkulatorsynthese mit umgekehrtem Drehsinn, d.h. $S'_{12} = 0$. Dieser Fall tritt nach (276) gerade für

$$\rho_1 = (\underline{S}^{-1})_{11} - \frac{(\underline{S}^{-1})_{13}^2}{(\underline{S}^{-1})_{12}} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{12} - S_{13}^2} \tag{284}$$

ein. Wenn (283) weder mit (278) noch mit (284) erfüllt werden kann, ist eine Zirkulatorsynthese mit passiven Anpassungszweitoren ausgeschlossen. Dieser Sachverhalt entspricht offenbar der Bedingung (272).

Die Frage nach dem Erreichen eines möglichst großen Betrages des von Null verschiedenen Übertragungskoeffizienten verdient besondere Aufmerksamkeit. Es ist wahrscheinlich (aber keineswegs sicher), daß bei festem Dreitor und variabel gedachten passiven oder verlustlosen Anpassungszweitoren die Gesamtschaltung die geringsten Verluste für unitäres $\underline{T}$ hat, d.h. für

$$|\rho_1|^2 + |\tau|^2 = 1 \tag{285}$$

$$|\rho_1| = |\rho_2| \tag{286}$$

$$\frac{1}{2}(\varphi_{\rho_1} + \varphi_{\rho_2}) - \varphi_\tau = (2k+1)\frac{\pi}{2} \; ; \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{287}$$

$$\varphi_{\rho_1} = \arg(\rho_1), \quad \varphi_{\rho_2} = \arg(\rho_2), \quad \varphi_\tau = \arg(\tau)$$

Wählt man nun ρ_1 aus (278) bzw. (284) und bestimmt ρ_2 und τ danach aus (285) - (287), so erzielt man mit Zweitoren dieser

Art weiterhin $S'_{13} = 0$ bzw. $S'_{12} = 0$, aber S'_{11} verschwindet nicht mehr, wenn $\underline{S}$ nicht unitär ist. Das entspricht der im ersten Teil des Abschnitts berechneten Zirkulatorsynthese durch Bezugsimpedanzwechsel. Es läßt sich jedoch eine obere Schranke für $|S'_{11}|$ durch die Ungleichung

$$|S'_{11}| \leq -\frac{|S'_{12}|}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}|S'_{12}|^2} \qquad (288)$$

$$\approx \varepsilon \quad \text{für} \quad |S'_{12}|^2 = 1 - \varepsilon \;,\; 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

bestimmen, die sich daraus ergibt, daß die Eigenwerte von $(\underline{1} - \underline{S}'^{*T}\underline{S}')$ positiv oder höchstens gleich Null sind, wenn man in $\underline{S}'$ den Fall $S'_{13} = 0$ betrachtet. Nach (195) gilt nämlich

$$\lambda_{\mu+1} = 1 - |S'_{11}|^2 - |S'_{12}|^2 - 2\mathrm{Re}(c_\mu S'_{11} S'^{*}_{12}) \qquad (289)$$

$$c_\mu = \exp(2\pi\mu i/3) \;;\; \mu = 0,1,2$$

aus $\lambda_\nu \geq 0$ ($\nu = 1,2,3$) schließt man (siehe [28] Anhang)

$$|S'_{11}|\,|S'_{12}| \leq 1 - |S'_{11}|^2 - |S'_{12}|^2 \qquad (290)$$

woraus sich (288) ergibt.

Ein neuer Aspekt für die Dimensionierung verlustloser Anpassungszweitore scheint sich daraus zu ergeben, daß bei festem ϱ_1 eine der Phasen φ_τ oder φ_{ϱ_2} noch frei wählbar ist, wenn man (285) - (287) als Bestimmungsgleichungen für ϱ_2 und τ bei ϱ_1 betrachtet. Auf $|S'_{12}|$ hat die Wahl von φ_τ oder φ_{ϱ_2} keinen Einfluß (ϱ_2 kommt in (276) überhaupt nicht vor). Nach (275) hängt jedoch S'_{11} von φ_τ bzw. φ_{ϱ_2} ab, und man wird versuchen, die Phasen zweckmäßig so zu wählen, daß $|S'_{11}|$ (d.h. die Leistungsfehlanpassung des Zirkulators) minimal wird. Leider ist $|S'_{11}|$ aber nach (275) eine Funktion von $(2\varphi_\tau - \varphi_{\varrho_1})$, was durch (287) bereits festgelegt ist. Eine Variation von φ_τ oder φ_{ϱ_2} bei festem ϱ_1 ohne Verletzen der Unitarität hat also keinen Einfluß auf die Leistungsfehlanpassung $|S'_{11}|$.

Aus der letzten Überlegung wird deutlich, daß $|S'_{11}|$ höchstens durch Verluste in den Anpassungszweitoren verkleinert werden kann, was aber wahrscheinlich zu Lasten von $|S'_{12}|$ geht. Eine Kompensation der Leistungsfehlanpassung mit aktiven Elementen ist praktisch uninteressant. Verlustlose Anpassungszweitore sind jedoch gar nicht exakt zu verwirklichen, und es liegt daher nahe, die unvermeidbaren Verluste so einzukalkulieren, daß sie die Leistungsfehlanpassung verkleinern, aber trotzdem ein größtmögliches $|S'_{12}|$ gewährleisten. Genauere Überlegungen werden in Abschnitt 6.3.3. durchgeführt, der ausschließlich der Dimensionierung von Anpassungszweitoren gewidmet ist.

Abschließend muß noch darauf hingewiesen werden, daß alle Betrachtungen dieses Abschnitts zu Zirkulatorsynthesemöglichkeiten unabhängig davon sind, auf welche Weise die Streumatrixelemente des zugrundeliegenden Dreitors bestimmt wurden. Benutzt man die Verfahren aus 4.2.2.3. und 4.2.3.3., so erhält man dreideutige Ergebnisse von S_{12} und S_{13} und der Drehsinn des Bauelements kann nicht festgelegt werden (d.h. es ist unklar, welche der Lösungen von (130) tatsächlich S^3_{12} und welche S^3_{13} darstellt). Es soll nun gezeigt werden, daß diese Mehrdeutigkeiten keine zusätzlichen Messungen in einer Brückenschaltung erforderlich machen, da sie die Berechnung von Zirkulatorsynthesemöglichkeiten nicht beeinflussen. Die Dreideutigkeit der Analyseverfahren bedeutet, daß

$$S_{11} \;,\; S_{12} \;,\; S_{13} \tag{291}$$

$$S_{11} \;,\; S_{12}\exp(+2\pi i/3),\; S_{13}\exp(-2\pi i/3) \tag{292}$$

$$S_{11} \;,\; S_{12}\exp(-2\pi i/3),\; S_{13}\exp(+2\pi i/3) \tag{293}$$

Lösungstripel sind. Zur Realisierung idealer Sperrdämpfung zweier Tore, d.h. $S'_{13} = 0$ oder $S'_{12} = 0$, muß (278) oder (284) gelten. Offenbar sind jedoch beide Gleichungen invariant gegen Vertauschen des Lösungstripels (291) mit (292) oder (293), so daß die Dreideutigkeit belanglos ist. Sie bewirkt nur, daß nach einer Zirkulatorsynthese der Wert des nichtverschwindenden Übertragungskoeffizienten nur bis auf Vielfache von

xp(2πi/3) bestimmt ist. Die Transformation $\underline{S} \rightarrow \underline{S}$ (siehe 275) - (277)) transformiert nämlich die Tripel (291) - (293) n analoge Tripel der gestrichenen Matrixelemente. Die Unklarheit, welcher Drehsinn dem Dreitor zuzuordnen ist, spielt eine ntergeordnete Rolle, da stets eine willkürliche Tornumerierung angenommen wird, die sich im Laufe der Rechnungen nicht ndert. Die Dimensionierung von Anpassungszweitoren wird davon icht betroffen, nach einer Zirkulatorsynthese muß der tatsächliche Drehsinn des Bauelements aber experimentell in einer rückenschaltung ermittelt werden.

. Experimentelle Untersuchungen

.1. Aufgabenbereich und Meßplatz

m folgenden wird die experimentelle Analyse von n-Toren und peziell zyklisch symmetrischer Dreitore im Hinblick auf eine irkulatorsynthese behandelt. Als wichtigstes Meßobjekt steht ine Zirkulatoranordnung vom stripline-Typ zur Verfügung (siehe b. 26), mit der man im Frequenzbereich von etwa 150 - 480 MHz bere Grenze durch Meßsender gegeben) nichtreziproke Eigenhaften sehr gut realisieren kann. Die Untersuchungen zur Anndbarkeit der Analysemethoden beschränken sich daher im wentlichen auf diesen Frequenzbereich. Alle Meßgeräte und Meßjekte haben koaxiale Anschlüsse vom Wellenwiderstand 60 Ω. r diesen Leitungstyp stehen Abschlüsse mit hoher Genauigkeit n R = 60 Ω (Wellensumpf, Anpassungsfall), R = 0 Ω (Kurzhluß) und R = ∞ Ω (Leerlauf) im obengenannten Frequenzbereich r Verfügung, so daß eine Streumatrixanalyse aus Eingangsreexionsfaktormessungen ermöglicht wird.

r Messung von Eingangsreflexionsfaktoren im Meter- und Deziterwellenbereich gibt es die verschiedensten Hilfsmittel, z. Reflektometer, Meßleitung und Z-g-Diagraph. Nachteil bei r Verwendung eines Reflektometers oder einer Meßleitung ist

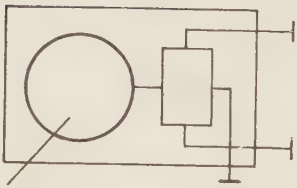
die Tatsache, daß Betrag und Phase des gesuchten Reflexionsfaktors erst aus anderen Meßdaten berechnet werden müssen, während die Polardiagrammanzeige des Z-g-Diagraphen den Eingangsreflexionsfaktor direkt liefert. Das hat einen weiteren, sogar prinzipiellen Nachteil von Reflektometer und Meßleitung zur Folge, der sich bei Messung mehrerer Reflexionsfaktoren bei derselben Frequenz auswirkt. Die Korrelation von Reflexionsfaktorfehlern, die auf Grund endlicher Genauigkeit der Meßgrößen auftreten, ist dann sehr unübersichtlich, wenn die Reflexionsfaktoren erst aus anderen Größen (z.B. aus dem Stehwellenverhältnis und der Lage des ersten Minimums auf der Meßleitung) berechnet werden müssen. Für die Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung von Streumatrixelementen spielt die Korrelation der Meßfehler jedoch eine wichtige Rolle, näheres siehe 6.2.2.. An dieser Stelle sei nur erwähnt, daß man für die Fehlerkorrelation bei Messungen mit dem Z-g-Diagraphen eine einfache Näherung angeben kann. Ein weiterer Vorteil des Z-g-Diagraphen ist, daß man mit dem Gerät auch Übertragungsmessungen durchführen kann. Je nach Genauigkeit der verwendeten Schaltungshilfsmittel kann man entweder Mehrdeutigkeiten berechneter Streumatrixelemente ausschließen oder sogar deren Genauigkeit kontrollieren.

Zum Abschluß sollen noch der Aufbau des Meßplatzes und seine Anwendungsmöglichkeiten besprochen werden. Zwei Z-g-Diagraphen der Firma Rohde u. Schwarz (Typen ZDU und ZDD) für die Frequenzbereiche 30-300 MHz und 300-2400 MHz bilden die zentralen Meßeinheiten, als Energiequelle wird ein Meßsender der gleichen Firma benutzt (Frequenzbereich 30-480 MHz, Type SLSV, 0 - 3,5 V_{eff} an 60 Ω). Daneben steht ein Polyskop (R. u. S., Type SWOB) zur Verfügung, mit dem Beträge von Übertragungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Frequenz qualitativ und grob quantitativ abgeschätzt werden können. In der Aufstellung Abb. 15 sind die Elemente des Meßplatzes einzeln schematisch dargestellt, Abb. 16 zeigt, wie die Zusammenschaltung zu Messungen erfolgt.

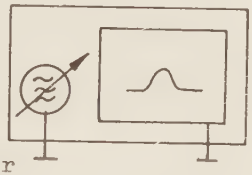
schematische Darstellung:

eßsender 30 - 480 MHz
(R. u. S., Type SLSV)

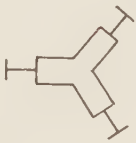
-g-Diagraph 30 - 300 MHz
300 - 2400 MHz
(R. u. S., Typen ZDU, ZDD)



olyskop 0,5 - 400 MHz
R. u. S., Type SWOB)



-Verzweigungsstück (20 Ω -Längs-
iderstand in jedem Zweig)



-Stück (verlustlos)

ämpfungsglied

eingestellter Dämpfungswert x

urzschlußstück

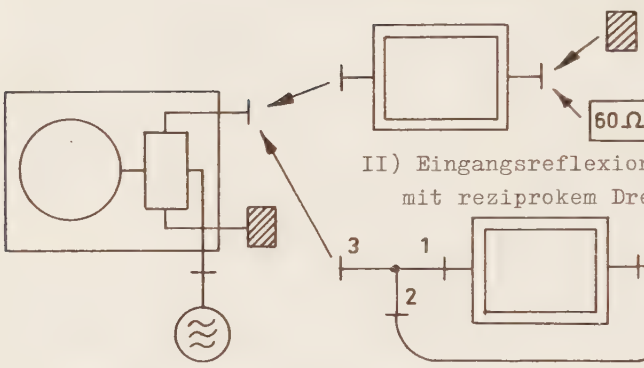
Ω -Abschluß

abel (Wellenwiderstand 60 Ω)

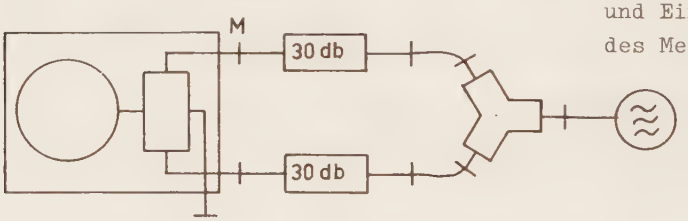
ßobjekt (nur zwei Tore
gezeichnet)

(Abb. 15: Elemente des Meßplatzes)

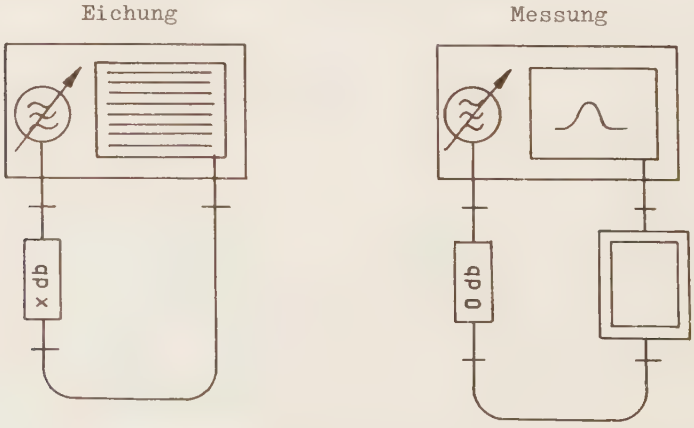
I) Eingangsreflexionsfaktormessung



III) Übertragungsfaktormessung mit Z-g-Diagraph
Amplituden- und Phaseneichung in der gezeichneten Schaltung; danach Auftrennen der Brücke bei 'M' (Meßkoaxial) und Einfügen des Meßobjekts.



IV) Übertragungsfaktormessung mit Polyskop



(Abb. 16: Anwendungsmöglichkeiten des Meßplatzes)

5.2. Das Problem der Fehlerfortpflanzung

5.2.1. Meßfehler beim Z-g-Diagraphen

Der Z-g-Diagraph enthält als wesentliche Bauelemente einen Richtkoppler an einem Meßkoaxial, einen weiteren an einem Vergleichskoaxial, darüberhinaus einen linearen Meßempfänger, eine ringförmige Meßleitung und ein Lichtmarkengalvanometer. In Verbindung mit einem Meßsender sind sowohl Eingangsreflexionsfaktor- als auch Übertragungsfaktormessungen möglich. Die Differenzspannung der beiden Richtkoppler dient als Bezugsgröße, und nach Umsetzung und Verstärkung im Meßempfänger wird der gesuchte Reflexionsfaktor durch das Lichtmarkengalvanometer auf dem Polardiagramm sichtbar gemacht. Bei Eingangsmessungen vergleicht man das vom Meßobjekt (an das Meßkoaxial angeschlossen) reflektierte mit dem am kurzgeschlossenen Vergleichskoaxial reflektierten Signal. Der Kurzschluß stellt ein sehr genaues Bezugsnormal dar. Vor jeder Messung müssen Amplitude und Phase bei der jeweiligen Meßfrequenz abgeglichen werden (Kurzschluß auch am Meßkoaxial). Bei einer anschließenden Messung eines Eingangsreflexionsfaktors (wahrer Wert Γ) ergibt sich auf dem Polardiagramm der Meßwert Γ_m , für den vom Hersteller des Geräts ein (auf 1 normierter) Fehlerkreisradius angegeben wird

$$r = 0{,}01 + 0{,}015\,|\Gamma_m| \tag{294}$$

Der wahre Wert Γ liegt also im Diagramm innerhalb eines Kreises um Γ_m mit Radius r, d.h. es gilt

$$\big|\,|\Gamma_m| - |\Gamma|\,\big| = |\Delta| \leq r \tag{295}$$

$$\big|\arg(\Gamma_m) - \arg(\Gamma)\big| = |\delta| \leq \arctan(r/|\Gamma_m|) \tag{296}$$

Zur Analyse von n-Toren aus Eingangsreflexionsfaktoren benötigt man prinzipiell mehrere Reflexionsfaktoren als Anfangswerte für eine Rechnung. Zusammengehörige Eingangsreflexionsfaktoren (d.h. bei derselben Frequenz bestimmte) werden unter

der Voraussetzung ermittelt, daß der Abgleich des Z-g-Diagraphen nur einmal vor Beginn der Messungen bei einer Frequenz vorgenommen wird. Es ist daher anzunehmen, daß die relative Genauigkeit von zwei Messungen wesentlich größer als die absolute Genauigkeit der Einzelmessung ist. Seien k Reflexionsfaktoren gemessen (wahre Werte Γ_ν, gemessene Werte $\Gamma_{m\nu}$, $\nu = 1...k$), so gilt für die wahren Fehler der Beträge und Phasen

$$\Delta_\nu = |\Gamma_{m\nu}| - |\Gamma_\nu| \quad ; \; |\Delta_\nu| \leq r_\nu \quad ; \quad \nu = 1...k \tag{297}$$

$$\delta_\nu = \arg(\Gamma_{m\nu}) - \arg(\Gamma_\nu) \; ; \; |\delta_\nu| \leq \arctan(r_\nu / |\Gamma_{m\nu}|) \quad \nu = 1...k \tag{298}$$

Wegen der Linearität des Meßempfängers nimmt man an, daß die Betragsfehler der k zusammengehörigen Messungen im wesentlichen durch die Nullpunkteinstellung und den Amplitudenabgleich verursacht werden. Daher wird man sie näherungsweise darstellen können durch

$$\Delta_\nu = \lambda \, r_\nu \quad ; \quad -1 \leq \lambda \leq +1 \quad ; \quad \nu = 1...k \tag{299}$$

mit einem festen λ für alle ν. Diese Annahme wird umso besser erfüllt sein, je größer die Fehler sind. (299) ist für $|\Delta_\nu| \leq 0{,}005$ im allgemeinen verletzt, da dann der statistische Ablesefehler des Beobachters zum Tragen kommt. Ähnliche Überlegungen gelten für die Phasenfehler δ_ν. Man nimmt an, daß die ringförmige Meßleitung, auf der die Phasenlage mit Hilfe einer Sonde bestimmt wird, nahezu homogen ist. Fehler von Phasenmessungen rühren daher fast ausschließlich vom Abgleich des Bezugsazimuts her. Analog zu (299) stellt man die δ_ν dar als

$$\delta_\nu = \lambda' \arctan(r_\nu / |\Gamma_{m\nu}|) \; ; \; -1 \leq \lambda' \leq +1 \; ; \; \nu = 1...k \tag{300}$$

mit einem festen λ' für alle ν, was umso besser erfüllt sein wird, je größer die Fehler sind. Die Gültigkeit von (300) geht für kleine Fehler in der Größenordnung der Ablesegenauigkeit ($|\delta_\nu| \leq \arctan(0{,}005/|\Gamma_{m\nu}|)$) verloren.

Da mit dem Z-g-Diagraphen auch Übertragungskoeffizienten nach Betrag und Phase gemessen werden können (siehe Abb. 16 III), scheint die Streumatrixanalyse aus Eingangsreflexionsfaktoren nicht zweckmäßig, da sie mit zusätzlichem Rechenaufwand verbunden ist. Gegen diese Überlegung sprechen zwei Tatsachen: Brückenmessungen sind prinzipiell ungenauer als Eingangsreflexionsfaktormessungen, da die Mehrfachreflexionen in der Brükkenschaltung Abb.16 III einen systematischen Fehler bedingen. Er ist umso kleiner, je größer man die Dämpfung in den Brückenzweigen wählt, die obere Grenze ist dadurch gegeben, daß der Z-g-Diagraph durch den Sender voll ausgesteuert werden muß. Eingangsmessungen sind dagegen nur mit dem absoluten Fehler des Z-g-Diagraphen behaftet, da als genaues Bezugsnormal ein Kurzschluß vorliegt. Der zweite Nachteil bei einer Streumatrixanalyse unter Zuhilfenahme von Übertragungsmessungen ist nur dann entscheidend, wenn mit den Streumatrixelementen weitere Größen (etwa neue Bezugsimpedanzen oder Anpassungszweitore für eine Zirkulatorsynthese) berechnet werden. Es zeigt sich, daß das Problem der Fehlerfortpflanzung nur bei einer ausschließlichen Benutzung von Eingangsreflexionsfaktoren als Anfangsgrößen einer Rechnung befriedigend gelöst werden kann.

6.2.2. Fehlerfortpflanzung

Man betrachtet die Fehlerfortpflanzung, die bei der Berechnung eines komplexen Ergebnisses e aus den Eingangsreflexionsfaktoren $\Gamma_1 \ldots \Gamma_k$ auftritt. Es gelte

$$e = f(\Gamma_1 \ldots \Gamma_k) = f(|\Gamma_1|, \arg(\Gamma_1), \ldots, |\Gamma_k|, \arg(\Gamma_k)) \quad (301)$$

wobei f zunächst nicht näher bestimmt sei. Rechnet man mit den Meßwerten $\Gamma_{m1} \ldots \Gamma_{mk}$, so erhält man

$$e_m = f(\Gamma_{m1} \ldots \Gamma_{mk}) \quad (302)$$

was sich von e unterscheidet. Da die wahren Fehler

$$\Delta = |e_m| - |e| \tag{303}$$

$$\delta = \arg(e_m) - \arg(e) \tag{304}$$

nicht zugänglich sind, wird man versuchen, einen Fehlerkreisradius r_e des Ergebnisses e_m zu bestimmen, für den wahrscheinlich die Ungleichungen

$$||e_m| - |e|| \leq r_e \tag{305}$$

$$|\arg(e_m) - \arg(e)| \leq \arctan(r_e/|e_m|) \tag{306}$$

erfüllt sind. Dazu macht man folgende Überlegung: die wahren Fehler Δ_ν, δ_ν (ν =1...k) der gemessenen Reflexionsfaktoren sind wegen (299) und (300) jeweils voneinander abhängig. Es ist daher wahrscheinlich, daß man in (302) bei gleichzeitiger und gleichsinniger Variation aller $|\Gamma_{m\nu}|$ oder aller $\arg(\Gamma_{m\nu})$ in den zugehörigen Fehlerintervallen (siehe (297), (298)) Werte von f überstreicht, zu denen eventuell e gehört. Man nimmt also an, daß die Ungleichungen

$$\min_1 = \underset{\mu=1\cdots g}{\text{Minimum}}(|f_\mu|) \leq |e| \leq \underset{\mu=1\cdots g}{\text{Maximum}}(|f_\mu|) = \max_1 \tag{307}$$

$$\min_2 = \underset{\mu=1\cdots g}{\text{Minimum}}(\arg(f_\mu)) \leq \arg(e) \leq \underset{\mu=1\cdots g}{\text{Maximum}}(\arg(f_\mu)) = \max_2 \tag{308}$$

$$f_\mu = f\left[|\Gamma_{m1}| + c_{\mu 1} r_1,\ \arg(\Gamma_{m1}) + c'_{\mu 1}\arctan(r_1/|\Gamma_{m1}|),\ \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots,\ |\Gamma_{mk}| + c_{\mu k} r_k,\ \arg(\Gamma_{mk}) + c'_{\mu k}\arctan(r_k/|\Gamma_{mk}|)\right]$$

μ = 1...9 , mit den Koeffizienten (ν = 1...k)

$$c_{1\nu} = c_{2\nu} = c_{3\nu} = -1\ ;\ c'_{1\nu} = -1\ ;\ c'_{2\nu} = 0\ ;\ c'_{3\nu} = +1$$

$$c_{4\nu} = c_{5\nu} = c_{6\nu} = 0\ ;\ c'_{4\nu} = -1\ ;\ c'_{5\nu} = 0\ ;\ c'_{6\nu} = +1$$

$$c_{7\nu} = c_{8\nu} = c_{9\nu} = +1\ ;\ c'_{7\nu} = -1\ ;\ c'_{8\nu} = 0\ ;\ c'_{9\nu} = +1$$

gelten. Das ist zumindest dann der Fall, wenn innerhalb der Variationsintervalle (die man der Darstellung der f_μ entnimmt) keine Extrema von f liegen. Es würde den Rechenaufwand bei einer Auswertung von Messungen jedoch enorm steigern, wollte man das jedesmal nachprüfen. Man beschränkt sich vielmehr auf die Annahme, daß beim tatsächlichen Auftreten von Extrema innerhalb der Intervalle die Intervallbreiten klein genug sind, so daß die Ungleichungen (307) und (308) nur geringfügig verletzt sind. Dazu trägt außerdem die Tatsache bei, daß außer den Funktionswerten an Intervallgrenzen (f_1, f_3, f_7, f_9) auch solche Werte in der Auswahl von $\min_1$, $\min_2$, $\max_1$, $\max_2$ berücksichtigt werden, bei denen als Argumente Intervallmittelpunkte auftreten (f_2, f_4, f_5, f_6, f_8).

Die in (307) und (308) auftretenden Werte $\min_i$, $\max_i$, i = 1,2, dienen zur Darstellung eines rechteckähnlichen Flächenstücks in der komplexen e-Ebene, in dem sowohl e_m (nach Konstruktion) als auch e (wahrscheinlich!) liegen, und das durch einen Kreis mit Radius

$$r_m = \frac{1}{2}\sqrt{(\max_1 - \min_1)^2 + |e_m|^2 \tan^2(\max_2 - \min_2)} \qquad (309)$$

näherungsweise überdeckt werden kann. Daher wird r_m als wahrscheinlicher Fehlerkreisradius von e_m aufgefaßt. Zweckmäßig definiert man als wahrscheinlichen Betrags- bzw. Phasenfehler

$$|\Delta_m| = \text{Maximum}(|e_m| - \min_1,\ \max_1 - |e_m|) \qquad (310)$$

$$|\delta_m| = \text{Maximum}(\arg(e_m) - \min_2,\ \max_2 - \arg(e_m)) \qquad (311)$$

Die praktische Verwendung der Formeln (309) - (311) liefert meistens sinnvolle Ergebnisse, so daß die gemachten Annahmen bei der Herleitung gerechtfertigt scheinen. Die Methode versagt z.B. bei Anwenden von Gl. (315) in Abschnitt 6.2.3.2. auf reziproke und schwach nichtreziproke n-Tore. Die in diesen Fällen mit (309) - (311) bestimmten Fehler sind zu klein, was sich experimentell nachweisen läßt. Die Ursache hierfür wird in 6.2.3.2. untersucht.

Bisher war keine Aussage darüber gemacht worden, was das komplexe Ergebnis e bzw. die Funktion f darstellen soll. Ist e ein Streumatrixelement, so kann man es grundsätzlich auch mit dem Z-g-Diagraphen direkt messen, ein Diagonalelement als Eingangsreflexionsfaktor bei formaler Leistungsanpassung aller übrigen Tore, ein Nichtdiagonalelement als Übertragungsfaktor (bei letzteren ist die Genauigkeit meistens geringer). Dieser Fall ist nicht so interessant wie der, bei dem e selbst eine Funktion der Streumatrixelemente ist. Berechnet man e aus Eingangsreflexionsfaktoren, so gilt im allgemeinen die in diesem Abschnitt angenommene Theorie der Fehlerfortpflanzung. Will man dagegen e aus gemessenen Streumatrixelementen bestimmen, so ist die bisherige Methode zur Vorhersage eines wahrscheinlichen Fehlers des Ergebnisses nicht anwendbar. Die gemessenen Anfangsgrößen müssen dann in die Gruppen Eingangsreflexionsfaktoren (Diagonalelemente von $\underline{S}$) und Übertragungsfaktoren (Nichtdiagonalelemente von $\underline{S}$) unterteilt werden. Für die Elemente jeweils einer der Gruppen gelten näherungsweise Fehlerkorrelationen (299) und (300), dagegen ist eine Vorhersage der Fehlerkorrelation eines Eingangsreflexionsfaktors und eines Übertragungsfaktors nicht möglich, da der Z-g-Diagraph jeweils neu abgeglichen werden muß. Unter der Voraussetzung voneinander unabhängiger Fehler der Eingangsreflexionsfaktoren und Übertragungsfaktoren wird der wahrscheinliche Fehler eines komplexen Ergebnisses e wesentlich größer ausfallen, wenn man es aus gemessenen Streumatrixelementen statt aus Eingangsreflexionsfaktoren berechnet. Damit ist der am Ende des letzten Abschnitts angedeutete Nachteil der Streumatrixanalyse durch Messung aller Matrixelemente mit dem Z-g-Diagraphen erklärt.

.2.3. Auswirkungen auf die Methoden der Streumatrixanalyse aus Eingangsreflexionsfaktoren

.2.3.1. Reziproke n-Tore

Als Beispiele werden zwei reziproke Dreitore untersucht, das Y-Verzweigungsstück (siehe Abb. 15) und die Zirkulatoranordnung Abb. 26 ohne äußeres Magnetfeld. Bei den Meßobjekten wird zunächst die zyklische Symmetrie geprüft, indem man die Eingangsreflexionsfaktoren $\Gamma_{\nu 00}, \Gamma_{\nu 0K}, \Gamma_{\nu K0}, \Gamma_{\nu 0L}, \Gamma_{\nu L0}, \Gamma_{\nu KK}, \Gamma_{\nu KL}, \Gamma_{\nu LK}$ $\Gamma_{\nu LL}$ ($\Gamma_{\nu AB}$ Eingangsreflexionsfaktor am Tor ν bei Abschluß von Tor μ mit A (= 0, K oder L) und von Tor $\varkappa$ mit B (=0, K oder L)) für $(\nu, \mu, \varkappa) = (1,2,3), (2,3,1)$ und $(3,1,2)$ mißt. Bei zyklischer Symmetrie sollten von den insgesamt 27 Reflexionsfaktoren nur sechs voneinander verschieden sein

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{00} &= \Gamma_{100} = \Gamma_{200} = \Gamma_{300} \\
\Gamma_{0K} &= \Gamma_{10K} = \Gamma_{20K} = \Gamma_{30K} = \Gamma_{1K0} = \Gamma_{2K0} = \Gamma_{3K0} \\
\Gamma_{0L} &= \Gamma_{10L} = \Gamma_{20L} = \Gamma_{30L} = \Gamma_{1L0} = \Gamma_{2L0} = \Gamma_{3L0} \\
\Gamma_{KK} &= \Gamma_{1KK} = \Gamma_{2KK} = \Gamma_{3KK} \\
\Gamma_{KL} &= \Gamma_{1KL} = \Gamma_{2KL} = \Gamma_{3KL} = \Gamma_{1LK} = \Gamma_{2LK} = \Gamma_{3LK} \\
\Gamma_{LL} &= \Gamma_{1LL} = \Gamma_{2LL} = \Gamma_{3LL}
\end{aligned}
\qquad (312)
$$

Dieser Sachverhalt ist beim Y-Stück sehr gut erfüllt, es ergeben sich im Bereich von 50 - 300 MHz keine feststellbaren Abweichungen. Die Zirkulatoranordnung zeigt dagegen geringfügige Symmetrieverletzungen. Die maximale Betragsdifferenz von je zwei Reflexionsfaktoren, die nach (312) identisch sein sollten, beträgt bei 300 MHz 0,005, die maximale Phasendifferenz 1° (beide Werte liegen an der Grenze der Ablesegenauigkeit), bei 50 MHz sind keine Abweichungen von der zyklischen Symmetrie mehr feststellbar. Eine generelle Vernachlässigung der Symmetriefehler erscheint daher gerechtfertigt.

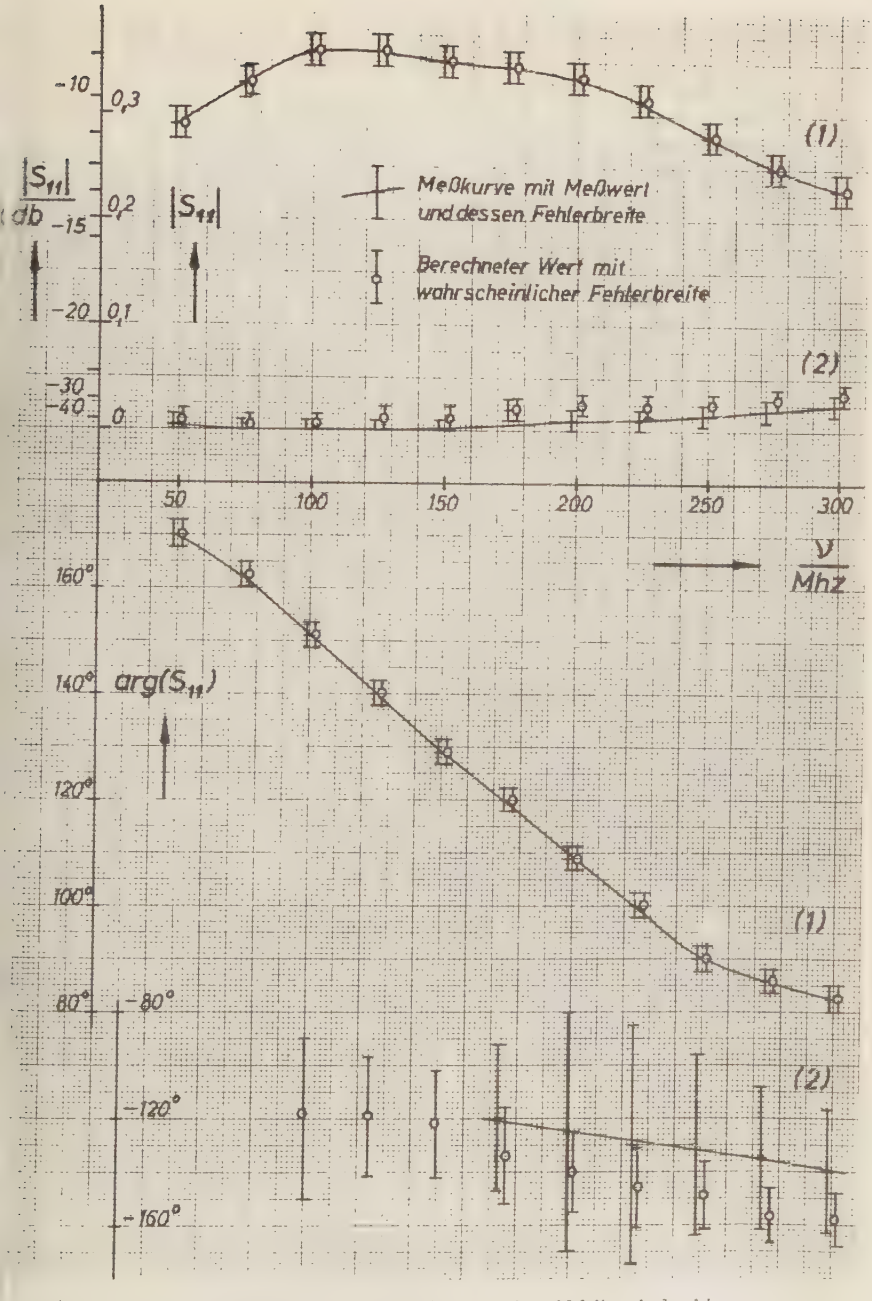
Aus den nach 4.2.2.1. erforderlichen zwei gemessenen Eingangsreflexionsfaktoren ('Zweipunktemethode') kann man die Streumatrixelemente S_{11} (= S_{22} = S_{33}) und S_{12} (= S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32}, jedoch nur zweideutig) sowie deren wahrscheinliche Fehler nach 6.2.2. berechnen. Um die Genauigkeit der Ergebnisse zu erhöhen, verwendet man zweckmäßig Mittelungsverfahren, die als 'Mehrpunktemethoden' bezeichnet werden sollen. Dazu bestimmt man mehr als zwei Eingangsreflexionsfaktoren am Meßobjekt als Anfangsgrößen für eine rechnerische Auswertung. Bei zyklisch symmetrischen Dreitoren bietet sich eine sogenannte 'Dreipunktemethode' an, bei der man Γ_{00} , Γ_{0K} und Γ_{0L} bestimmt und die Streumatrixelemente wie folgt berechnet

$$S_{11} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{00} + \frac{\Gamma_{0K} + \Gamma_{0L}}{2 + \Gamma_{0L} - \Gamma_{0K}}\right) \tag{313}$$

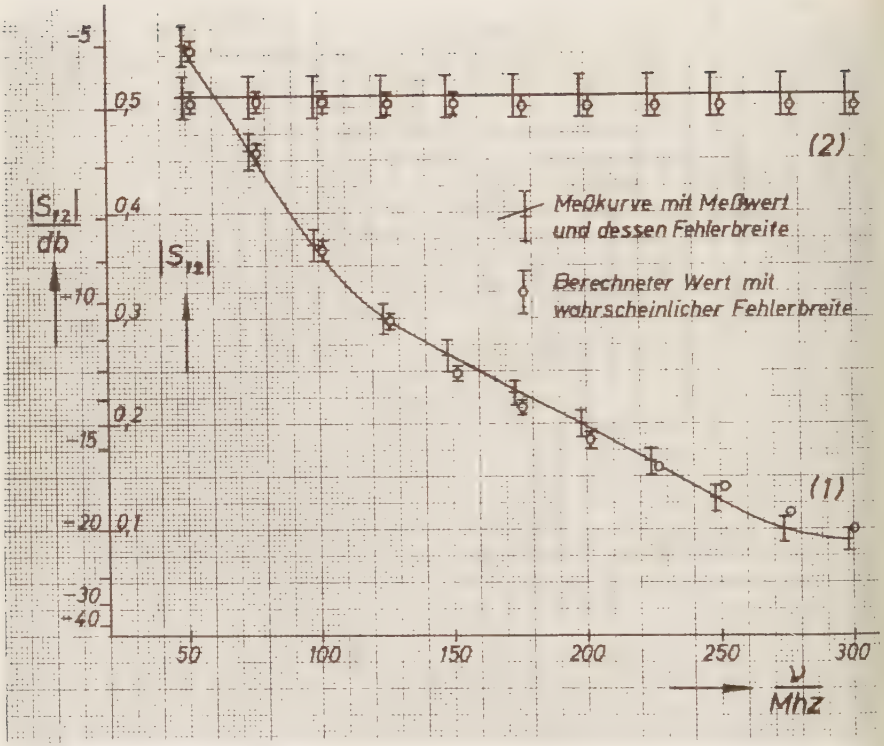
$$S_{12}^2 = \frac{1}{3}\left[(\Gamma_{00} + 1)(\Gamma_{00} - \Gamma_{0K}) + (\Gamma_{00} - 1)(\Gamma_{00} - \Gamma_{0L}) + \frac{2(\Gamma_{0L} - \Gamma_{0K})(1 + \Gamma_{0L})(1 - \Gamma_{0K})}{(2 + \Gamma_{0L} - \Gamma_{0K})^2}\right] \tag{314}$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, auf beliebige reziproke Zweitore (bzw. auf n-Tore, bei denen (n-2) Tore formal leistungsmäßig angepaßt sind) verallgemeinert werden zu können. Man mißt dann die Eingangsreflexionsfaktoren Γ_{10} , Γ_{20} , Γ_{1K} , Γ_{2K} , Γ_{1L} , Γ_{2L} und bestimmt S_{11} , S_{22} , S_{12}^2 aus den sechs zugehörigen Gleichungen des Typs (100). Bei zyklisch symmetrischen Dreitoren kann man S_{11} und S_{12}^2 auch aus allen sechs möglichen Eingangsreflexionsfaktoren (siehe (312)) durch ein Mittelungsverfahren ermitteln. Der Aufwand lohnt sich jedoch kaum, weil die mit (313), (314) berechneten Werte meistens innerhalb der wahrscheinlichen Fehlergrenzen von Sechspunktemethoden liegen.

Die durchgeführte Untersuchung des Y-Verzweigungsstücks und des Zirkulators ohne Zusatzfeld ergibt, daß die mit der 'Zweipunktemethode' (Abschnitt 4.2.2.1.), der'Dreipunktemethode' (313), (314), und einer'Sechspunktemethode' berechneten Werte von S_{11} und S_{12}^2 nahezu übereinstimmen. In den Abb. 17 - 19 sind S_{11} und S_{12} als Funktionen der Frequenz aufgetragen, zum

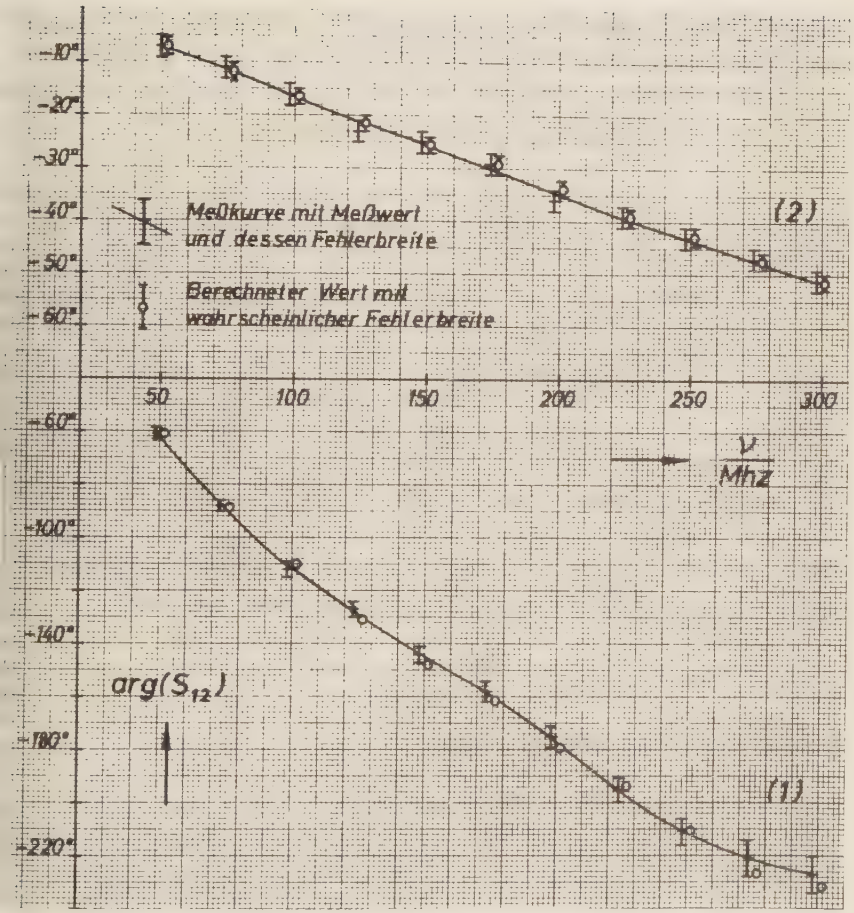


(Abb. 17: Streumatrixelement S_{11} in Abhängigkeit von der Frequenz; (1) Zirkulatoranordnung der Abb. 26 ohne äußeres Magnetfeld; (2) Y-Verzweigungsstück)



(Abb. 18: $|S_{12}|$ in Abhängigkeit von der Frequenz; (1) Zirkulatoranordnung der Abb. 26 ohne äußeres Magnetfeld; (2) Y-Verzweigungsstück)

Vergleich sind die mit dem Z-g-Diagraphen direkt gemessenen Werte eingezeichnet. (Zu Abb. 17 ist zu bemerken, daß $|S_{11}|$ des Y-Stücks für $\nu \leq 150$ MHz praktisch verschwindet, so daß keine experimentelle Phasenbestimmung mehr möglich ist). Außerdem zeigen die Abb. 17 - 19 wahrscheinliche Fehler der berechneten Werte, die in einem Sechspunkteverfahren ermittelt werden, und daneben die Meßfehler. In den Abb. 18 und 19 stimmen die wahrscheinlichen Fehlerbreiten der berechneten Werte zum Teil mit den Durchmessern der gezeichneten Kreise überein.



(Abb. 19: $\arg(S_{12})$ in Abhängigkeit von der Frequenz; (1) Zirkulatoranordnung der Abb. 26 ohne äußeres Magnetfeld; (2) Y-Verzweigungsstück)

ichtigstes Ergebnis der Untersuchung ist die Tatsache, daß nter Umständen die wahrscheinlichen Fehler der berechneten treumatrixelemente kleiner als die Absolutfehler der Meßwerte ind, was auf der in (299) und (300) vorausgesetzten Fehlerorrelation der Eingangsreflexionsfaktoren beruht. Bei der

Dreipunktemethode (313), (314) fallen die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Werte etwas größer aus als bei der Sechspunktemethode, deren Fehler in den Abbildungen eingetragen sind. Bei der Zweipunktemethode aus 4.2.2.1. schließlich stimmen sie in etwa mit den Meßfehlern überein.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß auf alle bisher besprochenen Mittelungsmethoden, die zusätzlich zur Zweipunktemethode eingeführt wurden, eventuell verzichtet werden kann, wenn die Frequenzabhängigkeit der Eingangsreflexionsfaktoren in der Umgebung der Betriebsfrequenz genügend genau untersucht wird. Durch Interpolation lassen sich dann Bestwerte bei der Betriebsfrequenz ermitteln, die als sehr genaue Anfangswerte für eine rechnerische Bestimmung der Streumatrixelemente dienen können. Der Z-g-Diagraph ist leider für eine solche Meßmethode ungeeignet, weil der Meßaufwand (trotz Zweipunktemethode) wegen des Neuabgleichs bei jeder Frequenz zu groß ist. Mit einem automatisch arbeitenden Meßplatz wären solche Untersuchungen am ehesten mit vertretbarem Zeitaufwand durchführbar.

6.2.3.2. Nichtreziproke n-Tore

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Mittelungsmethoden lassen sich auch auf nichtreziproke Bauelemente anwenden. Statt der Quadrate von Nichtdiagonalelementen sind jetzt nur noch Produkte jeweils symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegender Streumatrixelemente bestimmbar. Berechnet man darüberhinaus die Matrixelemente selbst (bis auf gewisse Mehrdeutigkeiten) nach den in 4.2.2.2., 4.2.2.3., 4.2.2.4., 4.2.3.3. und 4.2.3.4. entwickelten Verfahren, so treten im Verlauf der Rechnung stets Ausdrücke der Form

$$e_{1,2} = \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\frac{1}{4} x^2 - y} \qquad (315)$$

auf. e_1 und e_2 sind entweder selbst symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegende Streumatrixelemente (siehe (115)) oder deren

zweite (siehe (149), (150) und (183), (184)) bzw. dritte Potenzen (siehe (131), (132)), während x und y gewisse Funktionen von Eingangsreflexionsfaktoren darstellen. Falls das Bauelement reziprok ist, gilt jedenfalls

$$x^2 = 4y \tag{316}$$

wenn x und y aus den wahren Werten der Eingangsreflexionsfaktoren berechnet werden. Diese sind natürlich nicht zugänglich, und man wird praktisch nur Werte $x_m = x + \Delta x$, $y_m = y + \Delta y$ berechnen können, die aus gemessenen Reflexionsfaktoren bestimmt werden. (Δx, Δy sind also die wahren Fehler von x_m, y_m). Verwendet man in (315) statt der wahren Werte x, y die Werte x_m, y_m, so ergibt sich

$$x_{m1,2} = \frac{1}{2}(x + \Delta x) \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - y + \frac{1}{2}\Delta xx + \frac{1}{4}\Delta x^2 - \Delta y} \tag{317}$$

$$= \frac{1}{2}(x + \Delta x) \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - y}\sqrt{1 + \frac{2\Delta xx + \Delta x^2 - 4\Delta y}{x^2 - 4y}} \tag{318}$$

$$(x^2 - 4y \neq 0)$$

Daraus entnimmt man, daß die Fehler Δx, Δy nur dann das Ergebnis unwesentlich beeinflussen, wenn

$$|2\Delta xx + \Delta x^2 - 4\Delta y| \ll |x^2 - 4y| \tag{319}$$

gilt, $|\Delta x|$, $|\Delta y| \ll |x|, |y|$ sei vorausgesetzt. (319) läßt sich sicher nicht bei Reziprozität (316) oder geringer Nichtreziprozität ($|x^2 - 4y| \ll 1$) erfüllen, und der Anwendung von (315) bei der Auswertung von Meßergebnissen ist dadurch eine prinzipielle Grenze gesetzt. Nichtreziprozität wird umso genauer registriert, je größer $|x^2 - 4y|$ wird. Eine untere Grenze der Anwendbarkeit könnte man z.B. durch die Forderung

$$|\Delta x||x^2 - 4y| \geq 2|\Delta x||x| + |\Delta x|^2 + 4|\Delta y| \tag{320}$$

definieren, so daß der Radikand der zweiten Wurzel in (318) dem Betrage nach zwischen $1 - |\Delta x|$ und $1 + |\Delta x|$ liegen muß.

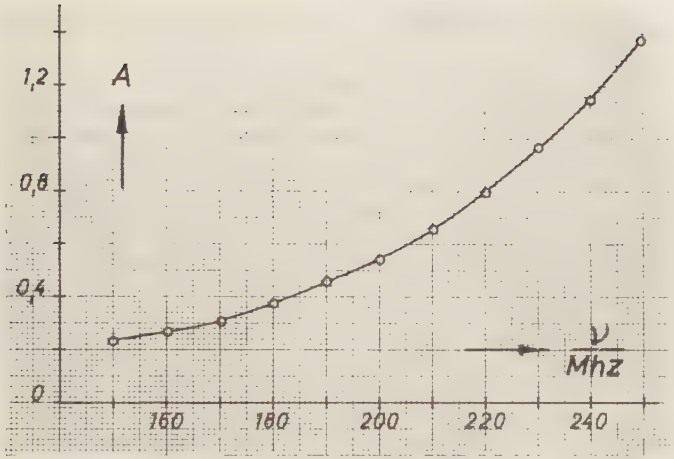
In der Praxis könnte man in (320) für x, y die Größen x_m, y_m und für Δx, Δy die wahrscheinlichen Fehler nach 6.2.2. einsetzen, ein Überprüfen dieser Bedingung bei jeder Meßreihe ist jedoch zu umständlich.

Stattdessen wird man als Kriterium für die Anwendbarkeit von (315) untersuchen, ob die in Brückenschaltungen ermittelten Werte von Streumatrixelementen innerhalb der nach 6.2.2. bestimmten wahrscheinlichen Fehlergrenzen der berechneten Werte liegen. Gleichzeitig gibt man zweckmäßig als Maß für die Nichtreziprozität des Bauelements (Zweitor oder auf die Tore ν und μ reduziertes n-Tor) einen normierten 'Abstand' A der Streumatrixelemente $S_{\nu\mu}$ und $S_{\mu\nu}$ an, den man durch

$$A = |S_{\nu\mu} - S_{\mu\nu}| / \sqrt{|S_{\mu\nu} S_{\nu\mu}|} \qquad (S_{\nu\mu} S_{\mu\nu} \neq 0) \qquad (321)$$

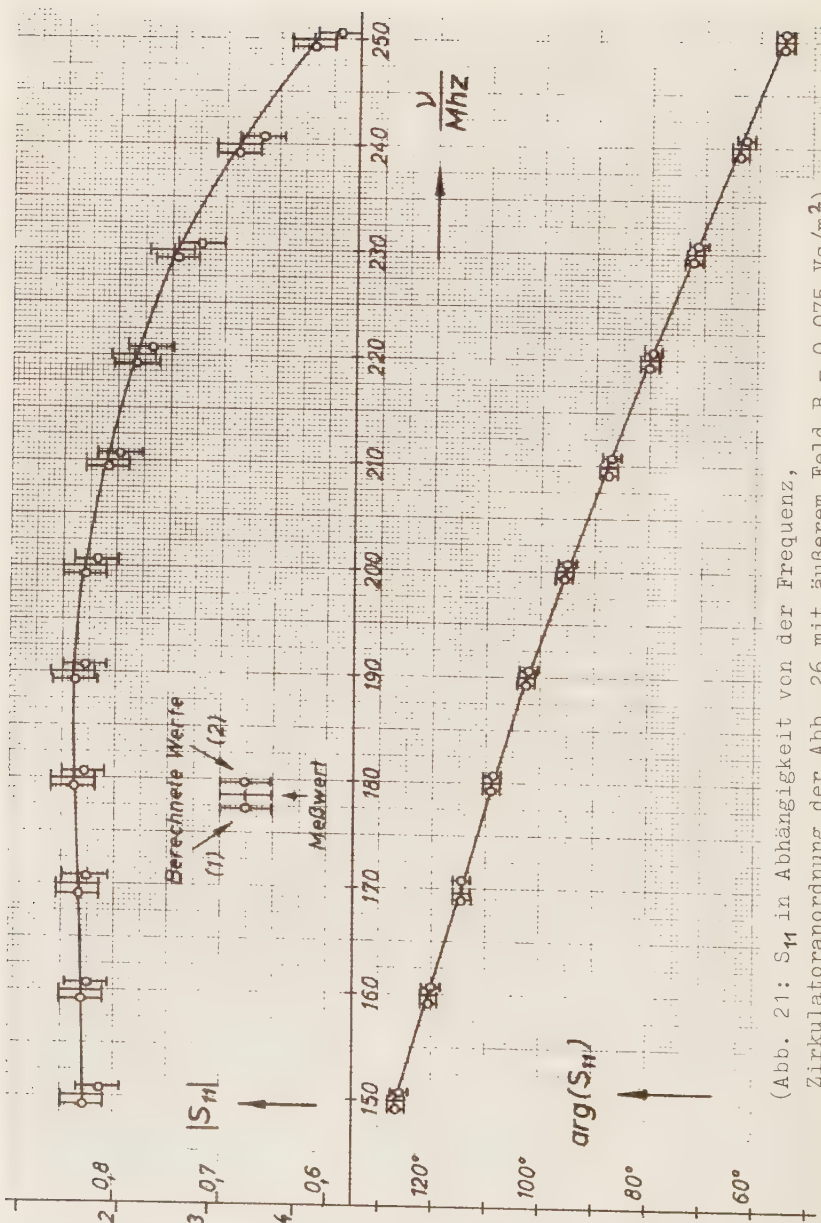
definiert (Reziprozität: A = 0). Als untere Grenze der Anwendbarkeit von (315) wird man dann einen kleinsten Abstand A angeben, bei dem die Auswertung mit (317) noch zu Ergebnissen mit wahrscheinlichen Fehlerintervallen führt, die die gemessenen Werte enthalten oder sich zumindest mit den Meßfehlerintervallen überschneiden.

Nun sind noch einige Vorbemerkungen zum Versuchsaufbau nötig, an dem die vorigen Überlegungen experimentell geprüft werden sollen. Als Meßobjekt dient die Zirkulatoranordnung der Abb. 26. Die Untersuchung dieses Abschnitts beschränkt sich auf eine Magnetfeldeinstellung, bei der im Bereich von 150 - 250 MHz sowohl nahezu reziprokes als auch relativ starkes nichtreziprokes Verhalten realisiert werden können. Zwischen 150 und 250 MHz ist A monoton wachsend (siehe Abb. 20), so daß eine Prüfung der im vorigen Absatz erwähnten Problematik sehr gut möglich ist. Die Wahl des Frequenzbereichs wurde zusätzlich von der Überlegung beeinflußt, die Anwendbarkeit der Verfahren in 4.2.2.3. und 4.2.3.3. zu prüfen, wo zyklische Symmetrie Voraussetzung ist. Unterhalb von 250 MHz sind die Symmetrieabweichungen des vorliegenden Bauelements sehr gering, so daß die Symmetriefehler nicht ins Gewicht fallen.

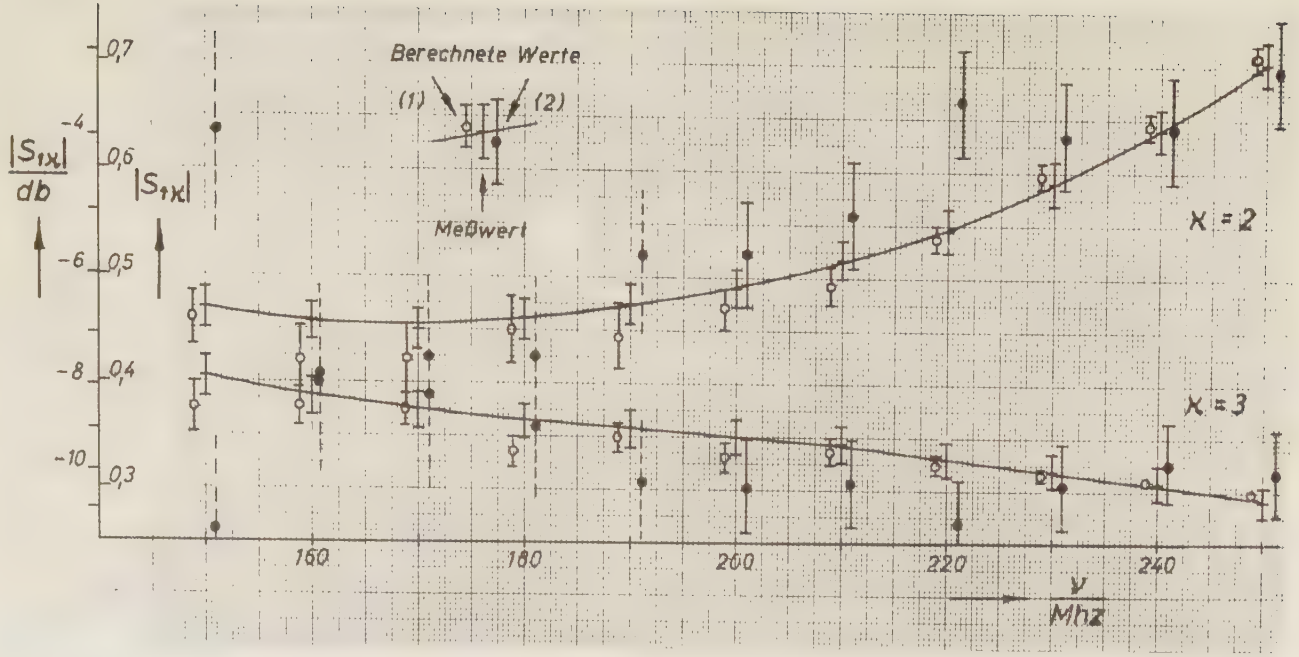


(Abb. 20: Nichtreziprozitätsmaß A der Zirkulatoranordnung Abb. 26 (äußeres Magnetfeld B = 0,075 Vs/m^2) in Abhängigkeit von der Frequenz)

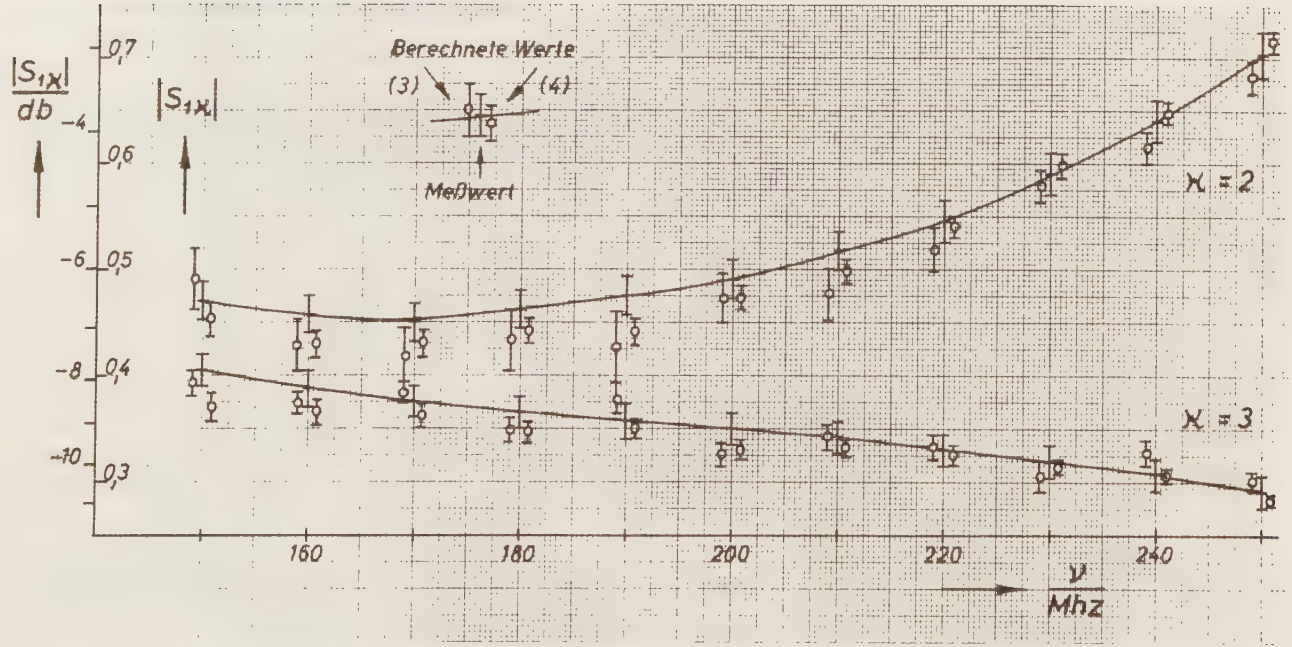
Im Prinzip gibt es zwei Arten der Streumatrixanalyse nichtreziproker, zyklisch symmetrischer Dreitore aus Eingangsreflexionsfaktoren, zunächst das Verfahren unter Zuhilfenahme eines reziproken Dreitors in 4.2.2.2. (das auch auf allgemeine nichtreziproke n-Tore anwendbar ist) und die Methoden der Abschnitte 4.2.2.3. und 4.2.3.3.. Als reziprokes 'Analysatordreitor' wählt man etwa ein verlustloses T-Stück, die Meßanordnung ist in Abb. 16 II dargestellt (die Kabelverbindung vom zweiten Tor des Meßobjekts zurück zum T-Stück gilt als Teil des T-Stücks). Das dritte Tor der Zirkulatoranordnung schließt man mit 60 Ω ab. Die T-Stück Eigenschaften werden vorher in getrennten Messungen in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmt, und man braucht dann nur noch den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 3 des T-Stücks (Abb. 16 II) zu messen. Außerdem werden die Eingangsreflexionsfaktoren Γ_{oo}, Γ_{ok}, Γ_{ol}, Γ_{kk}, Γ_{kl}, Γ_{ll} in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmt (Abb. 16 I) und zur Kontrolle noch die Übertragungsfaktoren S_{12}, S_{13} mit dem Z-g-Diagraphen direkt gemessen (Abb. 16 III). In den Abb. 21 - 25 sind die Ergebnisse der



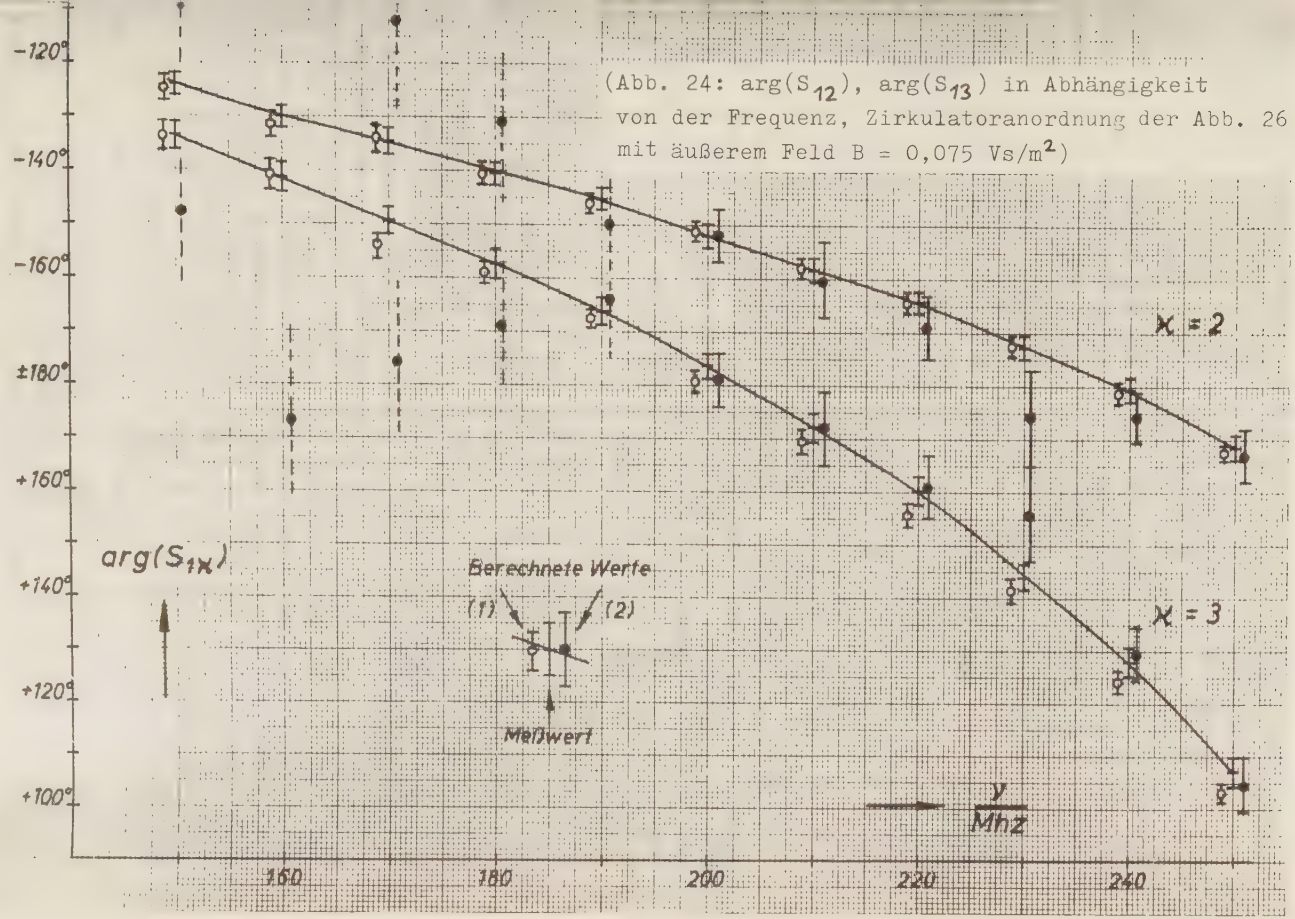
(Abb. 21: S_{11} in Abhängigkeit von der Frequenz, Zirkulatoranordnung der Abb. 26 mit äußerem Feld B = 0,075 Vs/m²)



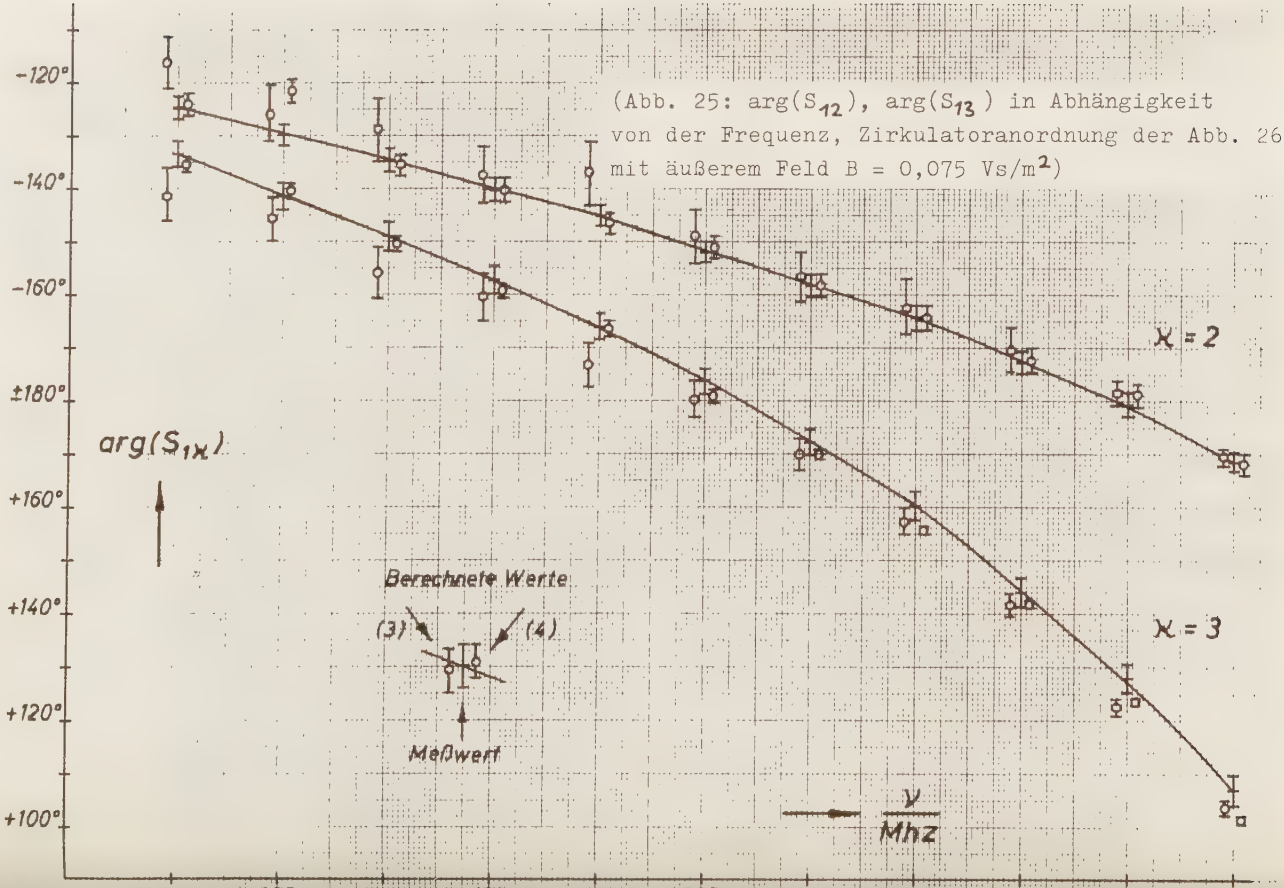
(Abb. 22: $|S_{12}|$, $|S_{13}|$ in Abhängigkeit von der Frequenz, Zirkulatoranordnung der Abb. 26 mit äußerem Feld B = 0,075 Vs/m^2)



(Abb. 23: $|S_{12}|$, $|S_{13}|$ in Abhängigkeit von der Frequenz,
Zirkulatoranordnung der Abb. 26 mit äußerem Feld B = 0,075 Vs/m^2)



(Abb. 24: $\arg(S_{12})$, $\arg(S_{13})$ in Abhängigkeit von der Frequenz, Zirkulatoranordnung der Abb. 26 mit äußerem Feld B = 0,075 Vs/m^2)



(Abb. 25: $\arg(S_{12})$, $\arg(S_{13})$ in Abhängigkeit von der Frequenz, Zirkulatoranordnung der Abb. 26 mit äußerem Feld B = 0,075 Vs/m^2)

Messungen zusammen mit den nach 4.2.2.2., 4.2.2.3., 4.2.3.3. berechneten Werten von S_{11}, S_{12} und S_{13} dargestellt.

Die Bestimmung von S_{11} (siehe Abb. 21) verläuft wie bei reziproken zyklisch symmetrischen Dreitoren. Die berechneten Werte vom Typ (1) sind mit Hilfe der Dreipunktemethode (313) gewonnen und unterscheiden sich kaum von den Ergebnissen von Sechspunktemethoden. Die berechneten Werte vom Typ (2) erhält man mit Gl. (169), d.h. allein aus Kurzschluß- und Leerlaufmessungen. Interessant ist, daß die so gewonnenen Werte von $|S_{11}|$ etwas kleiner als die gemessenen bzw. die aus Γ_{OO}, Γ_{OK} und Γ_{OL} berechneten Werte sind, jedoch innerhalb deren Fehlergrenzen liegen. Dieses Ergebnis ist ein Indiz für einen geringfügigen systematischen Fehler bei der Betragsmessung von Reflexionsfaktoren mit dem Z-g-Diagraphen.

In den Abb. 22 - 25 sind die gemessenen Werte von S_{12}, S_{13} den auf vier verschiedene Weisen berechneten Werten gegenübergestellt. Erwartungsgemäß nimmt die Genauigkeit der berechneten Größen mit wachsender Nichtreziprozität A, also mit steigender Frequenz zu (vergleiche Abb. 20). In den Abb. 22 und 24 sind neben den Meßwerten die genauesten berechneten Werte (Typ (1)) und die ungenauesten (Typ (2)) eingezeichnet. (1) stellt die Ergebnisse der Auswertung mit einer Sechspunktemethode (Anfangswerte Γ_{OO}, Γ_{OK}, Γ_{OL}, Γ_{KK}, Γ_{KL}, Γ_{LL}) dar, während die Werte vom Typ (2) mit Hilfe von Γ_{OO}, Γ_{OK}, Γ_{OL} und einer Eingangsreflexionsfaktormessung am T-Stück berechnet werden. Das Verfahren des Abschnitts 4.2.2.3. (Anfangswerte Γ_{OO}, Γ_{OK}, Γ_{KK}) liefert die Werte des Typs (3) in den Abb. 23 und 25. Schließlich könnte man noch die Methode von 4.2.3.3. (Anfangswerte Γ_{KK}, Γ_{KL}, Γ_{LL}) anwenden, sie läßt sich jedoch zu einem verbesserten Mittelungsverfahren erweitern, das noch kurz angegeben werden soll und die Werte vom Typ (4) liefert. Sowohl in 4.2.2.3. als auch in 4.2.3.3. dient Γ_{KK} zur Bestimmung von S_{12}^3 und S_{13}^3 aus S_{11} und S_{12} S_{13} (siehe (127) - (132)). Wenn zusätzlich noch die Eingangsreflexionsfaktoren Γ_{KL} und Γ_{LL} zur Verfügung stehen (4.2.3.3.), kann man aus ihnen jeweils zu (127) - (132) analoge Bestimmungsgleichungen für S_{12}^3 und S_{13}^3

aus S_{11} und $S_{12}S_{13}$ herleiten. Als Endergebnisse von S_{12}^3 und S_{13}^3 gibt man zweckmäßig das arithmetische Mittel der auf den drei Wegen berechneten Werte an. Für reelle Bezugsimpedanzen gilt (vergleiche (131), (132))

$$S_{12(3)}^3 = \frac{1}{3}\Big[x_{11}\Gamma_{KK} + x_{12} + x_{21}\Gamma_{KL} + x_{22} + x_{31}\Gamma_{LL} + x_{32} \qquad (322)$$
$$\overset{+}{(-)}\sqrt{(x_{11}\Gamma_{KK} + x_{12})^2 - S_{12}^3 S_{13}^3}\quad \overset{+}{(-)}\sqrt{(x_{21}\Gamma_{KL} + x_{22})^2 - S_{12}^3 S_{13}^3}$$
$$\overset{+}{(-)}\sqrt{(x_{31}\Gamma_{LL} + x_{32})^2 - S_{12}^3 S_{13}^3}\Big]$$

$$x_{11} = \frac{1}{2}((S_{11}+1)^2 - S_{12}S_{13}) \qquad x_{12} = -S_{11}x_{11} + S_{12}S_{13}(S_{11}+1)$$

$$x_{21} = \frac{1}{2}(S_{11}^2 - 1 - S_{12}S_{13}) \qquad x_{22} = -S_{11}x_{21} + S_{12}S_{13}S_{11}$$

$$x_{31} = \frac{1}{2}((S_{11}-1)^2 - S_{12}S_{13}) \qquad x_{32} = -S_{11}x_{31} + S_{12}S_{13}(S_{11}-1)$$

S_{11} und $S_{12}S_{13}$ sind durch (169) und (170) als Funktionen von Γ_{KK}, Γ_{KL} und Γ_{LL} gegeben (reelle Bezugsimpedanz: $\varphi = 0$, $E = 1$). Die Werte (1) der Sechspunktemethode (Abb. 22 und 24) erhält man, indem man S_{11} und $S_{12}S_{13}$ als Mittelwerte aus den Formeln (313) und (169) sowie (314) und (170) berechnet und anschließend (322) anwendet.

Von 'Brauchbarkeit' der berechneten Werte in den Abb. 22 - 25 spricht man zweckmäßig dann, wenn die Ergebnisse innerhalb der Fehlergrenzen der Meßwerte liegen und die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Werte nicht größer als die Meßfehler sind. Oberhalb von 200 MHz, d.h. für $A \gtrsim 0{,}6$ (vergleiche Abb. 20) sind insbesondere die Verfahren vom Typ (1) und (4) brauchbar. Obwohl (4) nur Ergebnisse einer Dreipunktemethode darstellt, sind die wahrscheinlichen Fehler meistens kleiner als bei der Sechspunktemethode (1). Daraus schließt man, daß die bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung vorausgesetzten Fehlerkorrelationen (299) und (300) nicht sehr gut erfüllt sind, sondern vielmehr von statistischen Meßfehlern überlagert werden. Verfahren (3) dürfte etwa oberhalb von 220 MHz ($A \gtrsim 0{,}8$) brauchbar sein, es ist ungenauer und hat eine stärkere Fehlerfort-

pflanzung als (4), weil keine Mittelung der Art (322) möglich ist. Die Analyse mit Hilfe eines reziproken Dreitors ist im oben genannten Sinne nicht brauchbar, weil die Genauigkeit nicht ausreichend und vor allem die Fehlerfortpflanzung zu groß ist. Unterhalb von 200 MHz ist noch nicht einmal ein wahrscheinlicher Fehler nach 6.2.2. angebbar, was in den Abb. 22 und 24 durch gestrichelte Linien statt der Fehlerbreiten angedeutet ist.

Ursache für die Unterlegenheit der Berechnungsmethode mit Hilfe des reziproken Dreitors ist die Tatsache, daß außer den Fehlern der gemessenen Eingangsreflexionsfaktoren auch die Fehler bei der Bestimmung der Eigenschaften des Analysatordreitors eingehen. Letztere können zwar relativ klein gehalten werden, indem man die Meßstatistik wenigstens teilweise durch Interpolation über die Frequenz eliminiert, wirken sich aber trotzdem noch ungünstig aus. Die Interpolation wurde bei der Herleitung der Ergebnisse in den Abb. 22 und 24 schon berücksichtigt, bringt aber keine spürbare Verbesserung. Daraus läßt sich nur der Schluß ziehen, daß die Meßgenauigkeit des Z-g-Diagraphen nicht ausreicht, die Eigenschaften des Analysatordreitors so präzise zu bestimmen, daß das Verfahren in 4.2.2.2. Vorteile bietet. Falls dieses Problem mit Hilfe eines besseren Meßgerätes gelöst werden kann, gibt es noch eine Möglichkeit, das Verfahren zu einer sehr genauen Mittelungsmethode zu erweitern. Der Grundgedanke besteht darin, daß man die Eigenschaften des reziproken Dreitors variiert und mehrere Eingangsreflexionsfaktoren zur Bestimmung der Summe von Übertragungsfaktoren verwendet. Eine Variation erreicht man leicht dadurch, daß man die Kabellänge der Verbindung von Tor 2 des reziproken Dreitors mit dem Meßobjekt ändert (siehe Abb. 16 II). Entweder stellt man durch Kabelstücke verschiedener Länge diskrete Längenänderungen her oder arbeitet mit einer geeichten Verschiebungsleitung (oder Posaunenzug), die eine kontinuierliche Änderung gestattet. Bei Kenntnis der Phasenänderungen der Streumatrixelemente des Dreitors (mit Kabel bzw. Verschiebungsleitung) kann man mit Hilfe mehrerer Meßpunkte $\lceil_{3E}$ Summen von Übertragungsfaktoren berechnen und durch Mitteln Bestwerte bestimmen. Der

Meß- und Rechenaufwand ist jedoch so erheblich, daß an eine Realisierung der Methode nur mit einem automatisch arbeitenden Meßplatz gedacht werden kann.

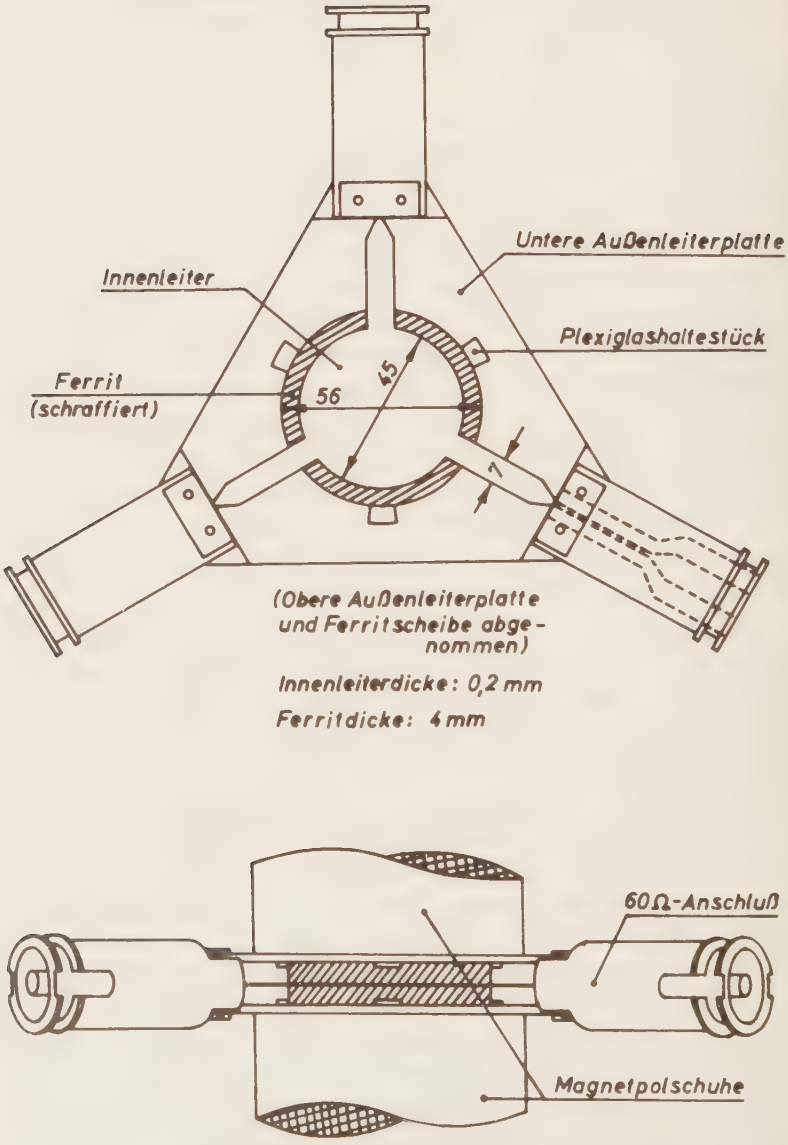
Zum Schluß sollen die verwendeten Verfahren der Streumatrixanalyse nichtreziproker n-Tore aus Eingangsreflexionsfaktoren noch einer zusammenfassenden Kritik unterzogen werden. Prinzipieller Nachteil aller Methoden ist die Unmöglichkeit, schwach nichtreziproke n-Tore genau zu untersuchen oder etwa zu entscheiden, ob ein n-Tor tatsächlich reziprok oder nichtreziprok ist. In solchen Fällen müssen die herkömmlichen Brückenverfahren zur Bestimmung von Übertragungsfaktoren zu Hilfe genommen werden, die natürlich eine Entscheidung zwischen reziprokem und nichtreziprokem Verhalten im Rahmen der Meßgenauigkeit gestatten. Im Bereich mittlerer und starker Nichtreziprozität (in dem behandelten Beispiel etwa für $A > 0{,}5$) kann die Methode der Analyse mit Hilfe eines reziproken Dreitors eventuell angewendet werden. Wenn die Eigenschaften des Analysatordreitors nicht wesentlich genauer als die übrigen Eingangsreflexionsfaktoren bestimmt werden können, sind die wahrscheinlichen Fehler der Übertragungsfaktoren jedoch wesentlich größer als die bei direkter Messung in Brückenschaltungen, eine vergleichbare Genauigkeit wird mit dem zur Verfügung stehenden Meßplatz nicht erreicht. Bei der Untersuchung zyklisch symmetrischer Dreitore bieten die Methoden der Streumatrixanalyse aus Γ_{KK}, Γ_{KL} und Γ_{LL} oder aus Γ_{OO}, Γ_{OK}, Γ_{OL}, Γ_{KK}, Γ_{KL}, Γ_{LL} Vorteile. Schon bei mittlerer Nichtreziprozität ist die Genauigkeit der berechneten Übertragungsfaktoren S_{12}, S_{13} meistens größer als bei direkter Messung (wenn man von den leicht zu behebenden Mehrdeutigkeiten absieht). Bei starker Nichtreziprozität ist besonders der berechnete kleinere Übertragungsfaktor genauer als der direkt gemessene, so daß z.B. Sperrdämpfungswerte realer Zirkulatoren besser zugänglich sind. Ein weiterer Vorteil ist die relativ gut bestimmbare Fehlerkorrelation der Ergebnisse, deren positive Auswirkungen auf die Berechnung von Größen mit Hilfe der Streumatrixelemente schon am Ende von 6.2.2. diskutiert wurden.

6.3. Untersuchungen an einem richtreziproken, zyklisch symmetrischen Dreitor

6.3.1. Das Meßobjekt

Abb. 26 zeigt den Gegenstand der Untersuchungen, eine Zirkulatoranordnung vom 'stripline'-Typ. Sie wurde einem Zirkulator des Philips-Zentrallaboratoriums (Aachen) nachgebaut. Das Bauelement erhielt koaxiale 60Ω -Anschlüsse, so daß eine Analyse mit dem vorhandenen Meßplatz möglich ist. Die Übergänge Koaxialleitung - Streifenleitung stellen zwar selbst transformierende Zweitore dar, ihre Eigenschaften können jedoch nicht unabhängig von dem vorliegenden Bauelement untersucht werden, so daß man sie als integrierte Bestandteile des Gesamtdreitors auffaßt. Ein Elektromagnet, dessen Polschuhe auf den dreieckigen Deckplatten der Streifenleiteranordnung senkrecht stehen, erzeugt das magnetische Zusatzfeld.

Beim Gesamtaufbau ist allein die Verwirklichung zyklischer Symmetrie kritisch. Die erreichbare Genauigkeit hängt zunächst von der Justierung der Magnetpolschuhe in bezug auf die Streifenleiteranordnung ab. Da der Polschuhdurchmesser von 75 mm schon in der Größenordnung des Luftspalts von 15 mm liegt, macht sich eine schwache radiale Feldabhängigkeit bemerkbar, die nur dann keine Rolle spielt, wenn Ferritscheiben und Polschuhe konzentrisch zueinander liegen. Genau dann bleibt die zyklische Symmetrie gewahrt. Dem Verfasser dient eine Plexiglasschablone zur Justierung, die wegen der nur geringfügigen Inhomogenität der Kraftflußdichte unkritisch ist. Entscheidender Fehlerquelle für Symmetrieverletzungen stellt dagegen nach den Erfahrungen des Verfassers der Innenleiter der Streifenleitung und seine Lage zwischen den Ferritscheiben dar. Zur Justierung verwendet man zweckmäßig sehr genaue Plexiglasschablonen, die Innenleiter und Ferritscheiben zunächst konzentrisch festhalten. Nach dem Verlöten des Innenleiters mit den 50Ω -Anschlüssen und dem Ankleben sechs kleiner Plexiglashal-



(Abb. 26: Nichtreziprokes, zyklisch symmetrisches Dreitor, 'Zirkulatoranordnung' vom stripline-Typ)

testücke (deren dielektrische Verluste vernachlässigbar sind) werden die Schablonen wieder entfernt. Der Innenleiter ist also 'freitragend', während jede Ferritscheibe durch drei Plexiglashaltestücke gegen seitliches Verschieben gesichert ist.

Durch Anlegen des Magnetfeldes wird die Permeabilität des Ferrits anisotrop (zur Feldtheorie gyrotroper Medien vergleiche z.B. [33]). Insbesondere ändert sich damit die elektrische Länge aller Wege auf denen die Wellenausbreitung im Innern der Zirkulatoranordnung stattfindet. Zirkular umlaufende Wellen 'sehen' je nach Umlaufsinn eine verschiedene Permeabilität des Mediums, die 'Aufspaltung' gegenüber dem Fall ohne äußeres Feld ist proportional zur Magnetisierung des Ferrits (siehe [33]). Kleinste mechanische Unsymmetrien des Bauelements, die ohne Zusatzfeld nicht nachweisbar sind, werden (soweit sie im Bereich der Ferritscheiben liegen) mit wachsender Magnetisierung stärker in Erscheinung treten. Aus dem gleichen Grund machen sich Symmetrieverletzungen bei konstanter Magnetisierung mit zunehmender Betriebsfrequenz des Dreitors stärker bemerkbar. Ein Maßstab für Unsymmetrie ist die Verletzung der Bedingung (312). Leider ist die Differenz von je zwei Eingangsreflexionsfaktoren, die nach (312) identisch sein sollten, weder von der Kraftflußdichte im Spalt zwischen den Magnetpolschuhen noch von der Betriebsfrequenz in einfacher Weise abhängig, die beide gut meßbar sind. Es zeigt sich, daß starke Abweichungen nur für gewisse Felder und Frequenzen auftreten, während für beliebige Felder und Frequenzen Durchschnittswerte gelten, die natürlich mit zunehmender Kraftflußdichte und Betriebsfrequenz wachsen. Die maximale Betragsdifferenz von je zwei Eingangsreflexionsfaktoren, die nach (312) identisch sein sollten, wurde mit 0,06 gemessen (Frequenzbereich 150 - 450 MHz). Dieser Wert wird jedoch nur selten erreicht, durchschnittlich sind Betragsdifferenzen kleiner als 0,02. Phasendifferenzen zweier theoretisch gleicher Eingangsreflexionsfaktoren sind meistens kleiner als $\arctan(0{,}04/|\Gamma|)$, das entspricht etwa 2° bei $|\Gamma| = 1$, etwa 4° bei $|\Gamma| = 0{,}5$ und ungefähr 10° bei $|\Gamma| = 0{,}2$. Bei Frequenzen über 300 MHz kommen manchmal größere Phasendifferenzen vor.

Um die Abweichungen von der Symmetrie bei Rechnungen zu berücksichtigen und dennoch die Theorie eines zyklisch symmetrischen Dreitors anwenden zu können, ordnet man dem Meßobjekt (Streumatrix $\underline{S}'$) formal ein zyklisch symmetrisches Ersatzdreitor (Streumatrix $\underline{S}$) zu, dessen Eigenschaften durch

$$S_{11} = (S'_{11} + S'_{22} + S'_{33})/3 \quad ; \quad S_{12} = (S'_{12} + S'_{23} + S'_{31})/3 \quad ;$$
$$S_{13} = (S'_{13} + S'_{21} + S'_{32})/3 \qquad (323)$$

definiert seien. Setzt man kleine Symmetrieverletzungen von $\underline{S}'$ voraus, d.h. $S'_{11} \approx S'_{22} \approx S'_{33}$, $S'_{12} \approx S'_{23} \approx S'_{31}$, $S'_{13} \approx S'_{21} \approx S'_{32}$, so gilt näherungsweise für die Eingangsreflexionsfaktoren des Ersatzdreitors

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00} &= (\Gamma'_{100}+\Gamma'_{200}+\Gamma'_{300})/3 \\
\Gamma_{0K} &= (\Gamma'_{10K}+\Gamma'_{1K0}+\Gamma'_{20K}+\Gamma'_{2K0}+\Gamma'_{30K}+\Gamma'_{3K0})/6 \\
\Gamma_{0L} &= (\Gamma'_{10L}+\Gamma'_{1L0}+\Gamma'_{20L}+\Gamma'_{2L0}+\Gamma'_{30L}+\Gamma'_{3L0})/6 \\
\Gamma_{KK} &= (\Gamma'_{1KK}+\Gamma'_{2KK}+\Gamma'_{3KK})/3 \qquad (324) \\
\Gamma_{KL} &= (\Gamma'_{1KL}+\Gamma'_{1LK}+\Gamma'_{2KL}+\Gamma'_{2LK}+\Gamma'_{3KL}+\Gamma'_{3LK})/6 \\
\Gamma_{LL} &= (\Gamma'_{1LL}+\Gamma'_{2LL}+\Gamma'_{3LL})/3
\end{aligned}$$

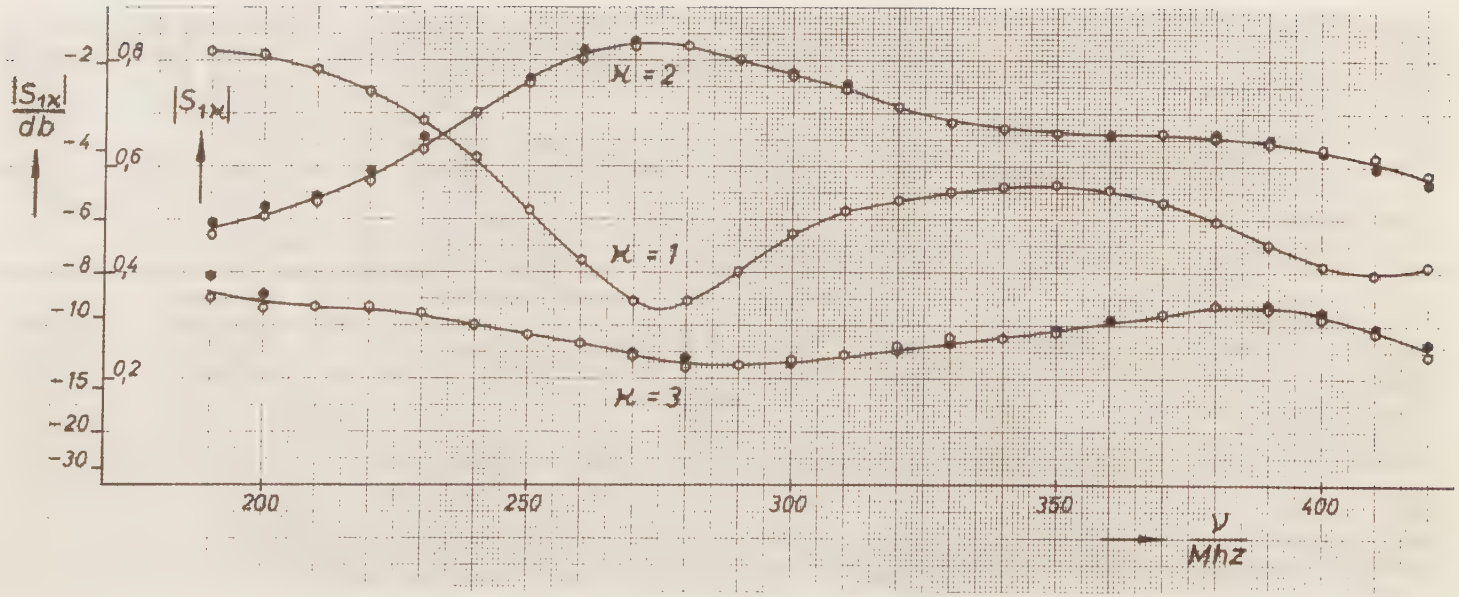
wobei in den Klammern Eingangsreflexionsfaktoren des Meßobjekts stehen. Die erste Gl. aus (324) ist sogar sicher erfüllt, da sie mit der ersten aus (323) identisch ist. Erst die Messungen zeigen, daß Näherung (324) tatsächlich brauchbar ist.

6.3.2. Die Streumatrix in Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld und der Betriebsfrequenz

Intentionen der vorliegenden Arbeit sind die praktische Analyse eines vorgegebenen Bauelements und die spätere Berechnung externer Anpassungszweitore. Daher werden die Streumatrixeigenschaften des zugrundeliegenden Dreitors nur in Abhängigkeit

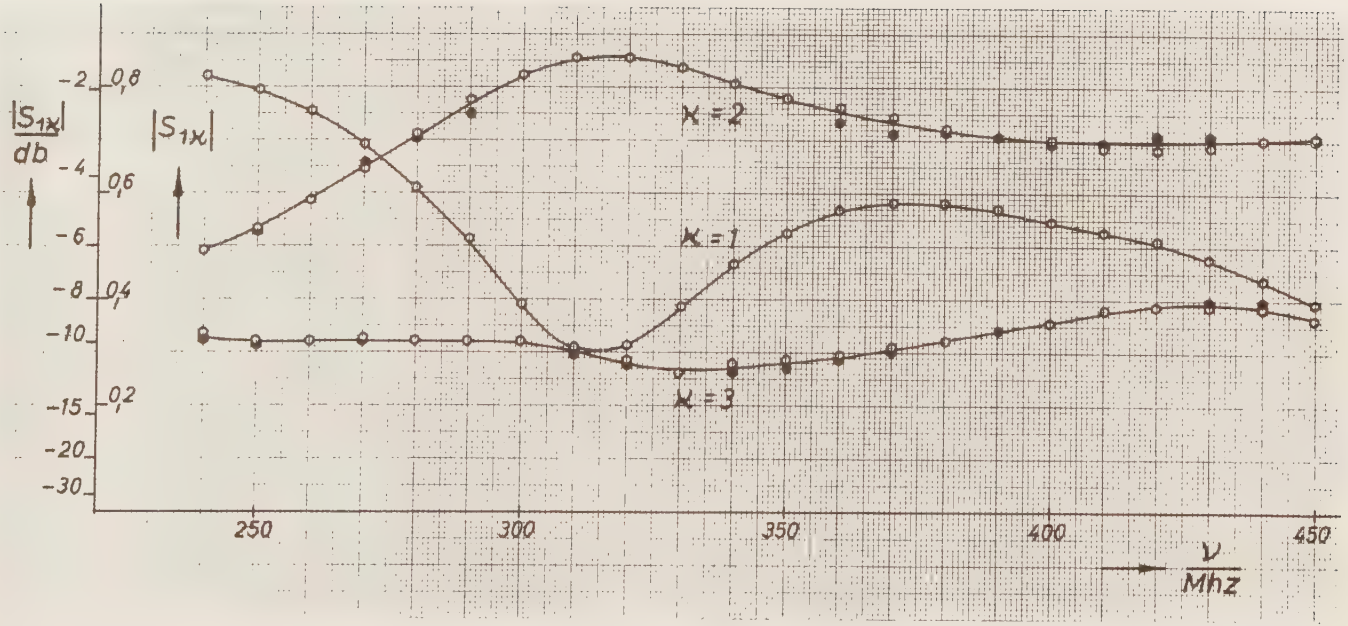
vom äußeren Magnetfeld und der Betriebsfrequenz untersucht. Auswirkungen von Geometrieänderungen sind nicht Gegenstand dieser Arbeit, sie sind bisher nur im Rahmen feldtheoretischer Arbeiten über Zirkulatoren behandelt worden (siehe z.B. [4],[5]).

Einen groben qualitativen Überblick über die Frequenzabhängigkeit von Beträgen der Nichtdiagonalelemente der Streumatrix gewinnt man mit dem Polyskop (Meßanordnung IV Abb. 16). Die Auswirkungen von Magnetfeldänderungen können ebenfalls qualitativ sichtbar gemacht werden. Die Polyskopmessungen machen deutlich, daß das Bauelement im Bereich von etwa 200 - 450 MHz und einem Zusatzfeld von 0,07 - 0,11 Vs/m^2 ausgeprägt nichtreziprokes Verhalten zeigt, das für sehr schwaches und sehr starkes Magnetfeld wieder annähernd in reziprokes Verhalten übergeht. Nach diesen Voruntersuchungen werden die Eingangsreflexionsfaktoren $\Gamma_{oo}, \Gamma_{o\kappa}, \Gamma_{o\iota}, \Gamma_{\kappa\kappa}, \Gamma_{\kappa\iota}, \Gamma_{\iota\iota}$ des Meßobjekts in Abhängigkeit von der Frequenz bei vier verschiedenen Zusatzfeldern gemessen und anschließend S_{11}, S_{12}, S_{13} bis auf die früher erwähnten Mehrdeutigkeiten berechnet. Die Abb. 27 - 34 zeigen die mit der Sechspunktemethode aus 6.2.3.2. gewonnenen Ergebnisse zusammen mit den Meßwerten, die in Übertragungsmessungen mit dem Z-g-Diagraphen gewonnen werden. Die Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Werten ist sehr gut, daher sind die Meßpunkte ● nur dann eingezeichnet, wenn sie sich von den berechneten Werten ○ im Rahmen der Zeichengenauigkeit unterscheiden lassen. In Abb. 35 ist die Größe $V = 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2 - |S_{13}|^2$ als Funktion der Frequenz für jede der vier Magnetfeldeinstellungen aus den Abb. 27 - 34 aufgetragen. Sie gibt bis zu einem gewissen Grade Aufschluß über Verluste des Bauelements. Notwendige Bedingung für Verlustlosigkeit ist ihr Verschwinden (siehe (249)).

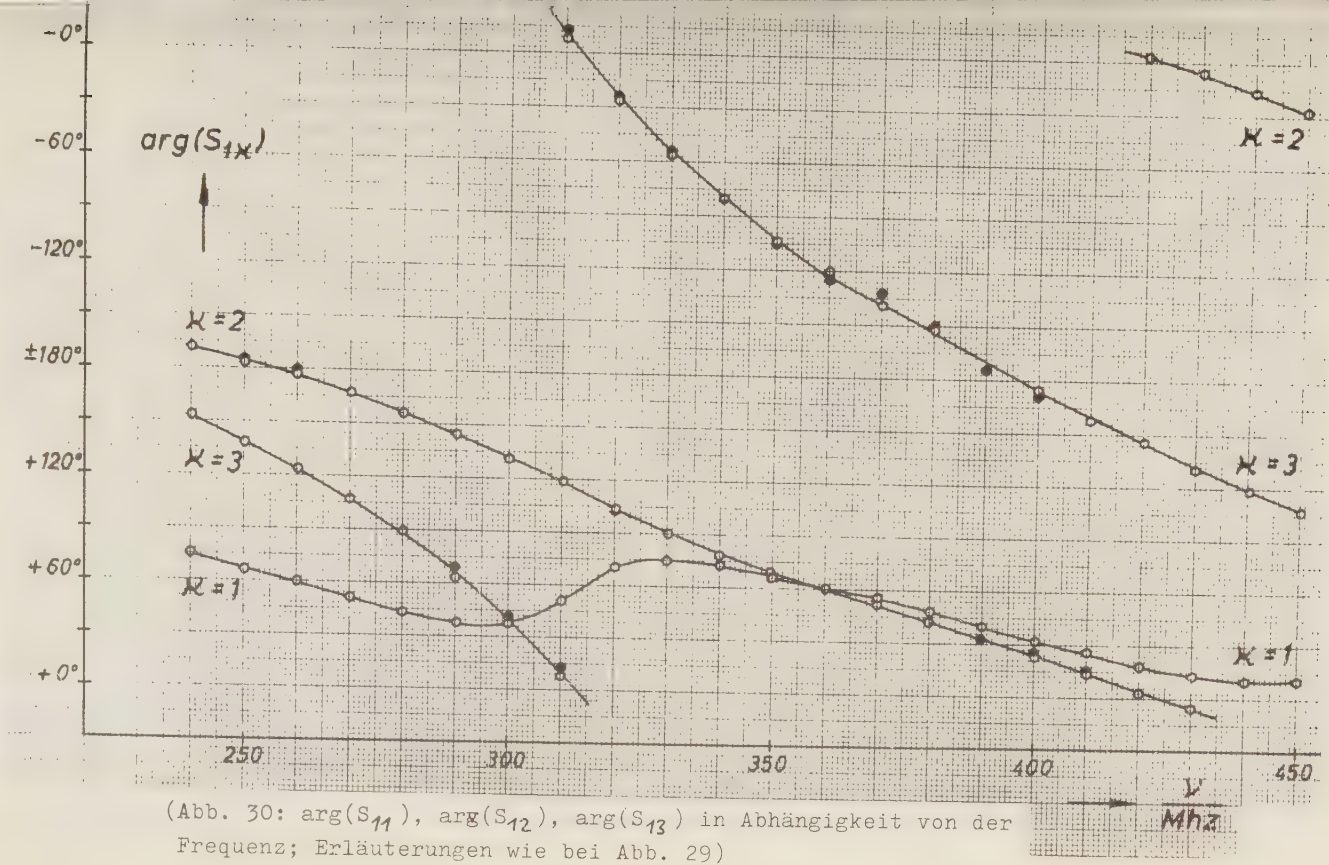


(Abb. 27: $|S_{11}|$, $|S_{12}|$, $|S_{13}|$ der Zirkulatoranordnung Abb. 26
(äußeres Feld B_1 = 0,082 Vs/m^2) in Abhängigkeit von der Frequenz;
berechnete Werte ○ ; gemessene Werte ● sind nur eingezeichnet,
falls sie sich von den berechneten unterscheiden)

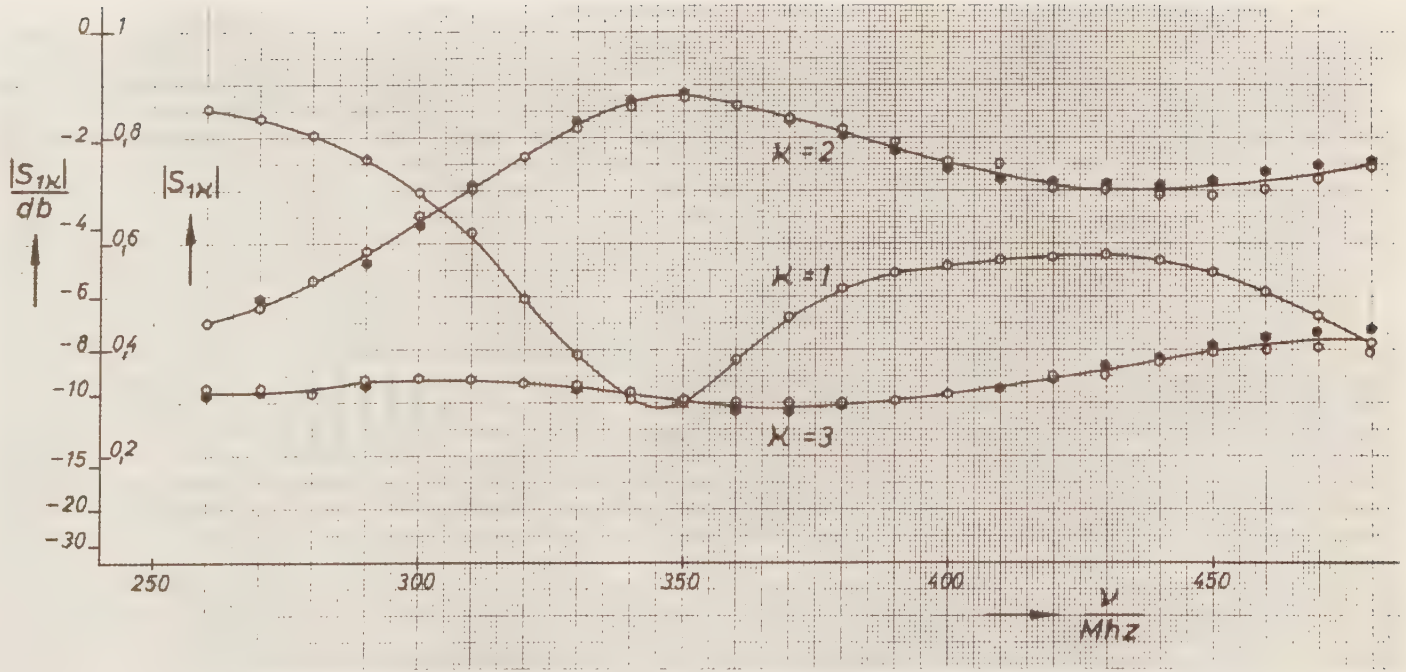
(Abb. 28: $\arg(S_{11})$, $\arg(S_{12})$, $\arg(S_{13})$ in Abhängigkeit von der Frequenz; Erläuterungen wie bei Abb. 27)



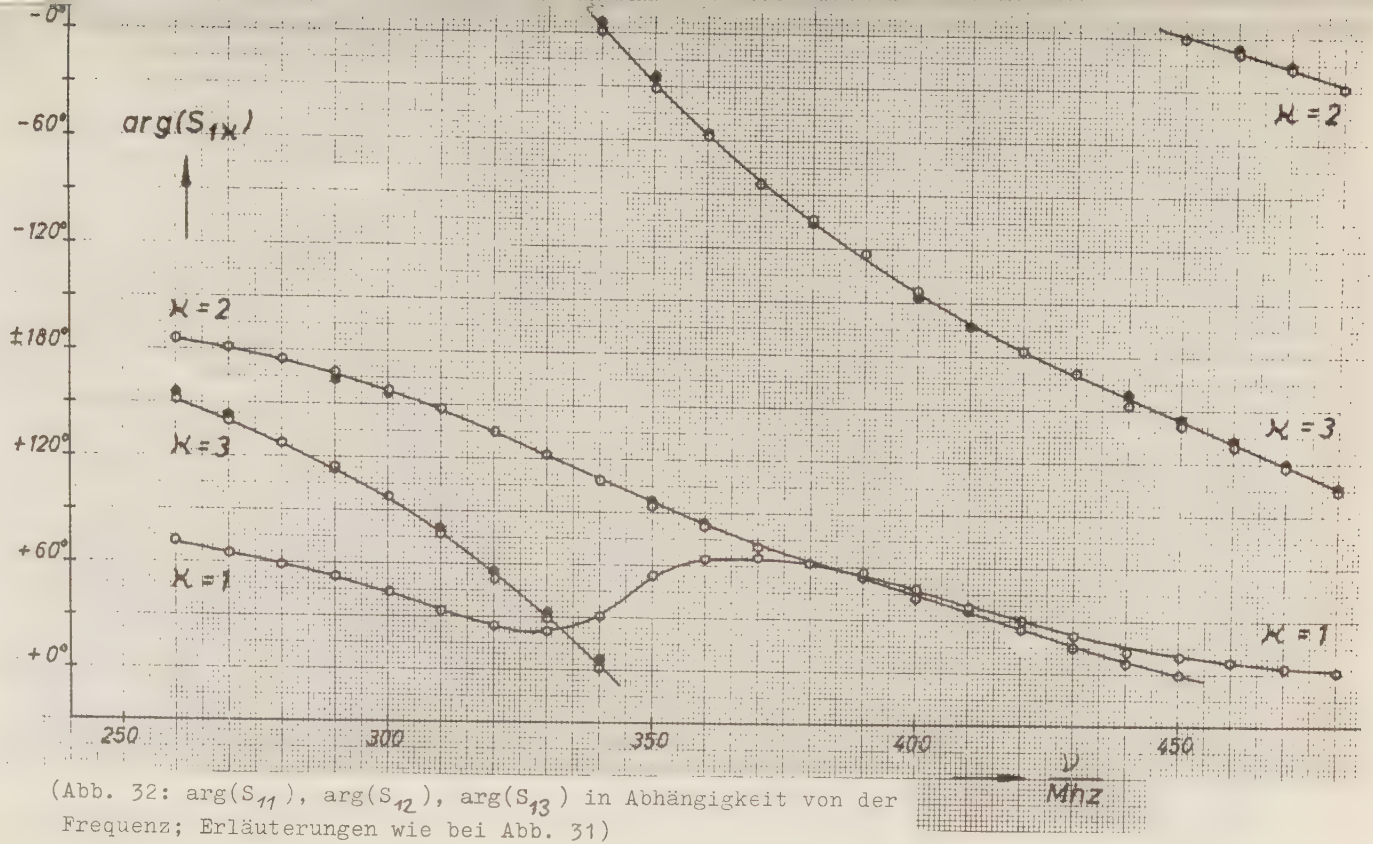
(Abb. 29: $|S_{11}|$, $|S_{12}|$, $|S_{13}|$ der Zirkulatoranordnung Abb. 26
(äußeres Feld B_2 = 0,086 Vs/m^2) in Abhängigkeit von der Frequenz;
berechnete Werte ○ ; gemessene Werte ● sind nur eingezeichnet,
falls sie sich von den berechneten unterscheiden)



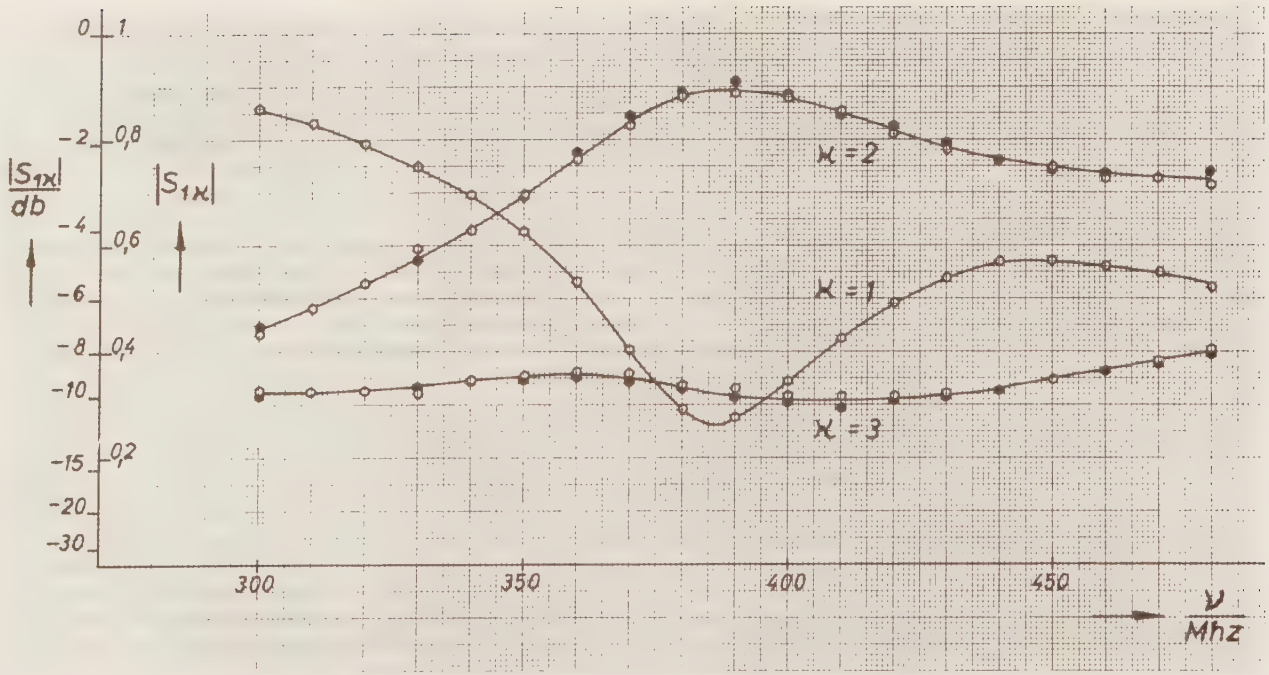
(Abb. 30: arg(S_{11}), arg(S_{12}), arg(S_{13}) in Abhängigkeit von der Frequenz; Erläuterungen wie bei Abb. 29)



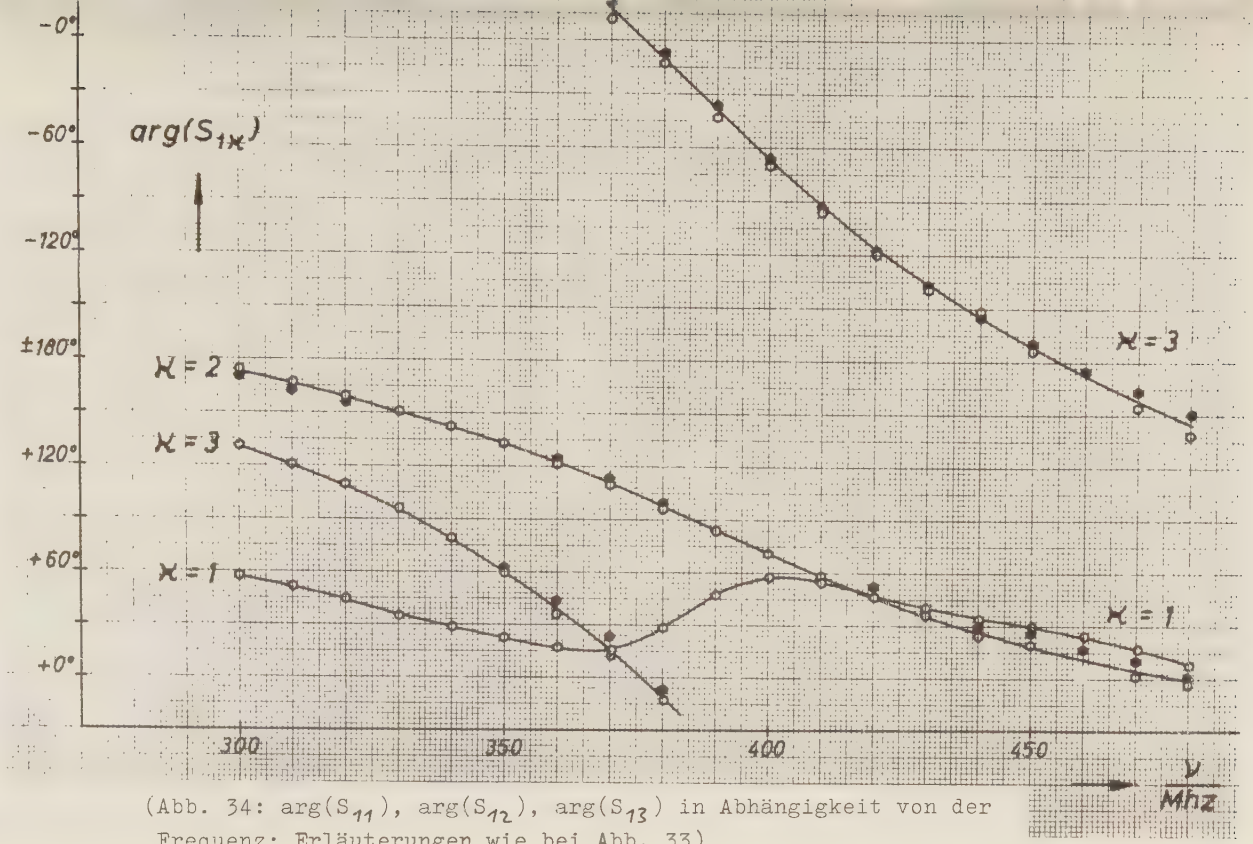
(Abb. 31: $|S_{11}|$, $|S_{12}|$, $|S_{13}|$ der Zirkulatoranordnung Abb. 26 (äußeres Feld $B_3 = 0{,}091\ Vs/m^2$) in Abhängigkeit von der Frequenz; berechnete Werte ○ ; gemessene Werte ● sind nur eingezeichnet, falls sie sich von den berechneten unterscheiden)



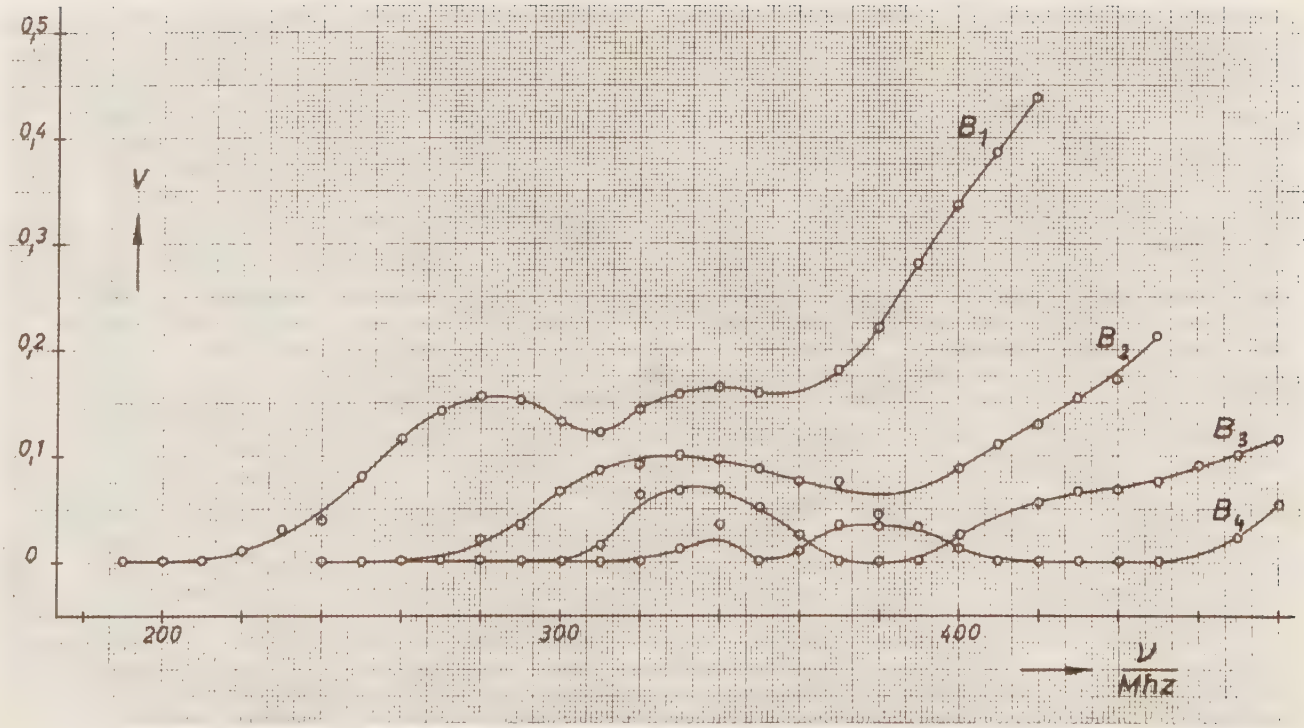
(Abb. 32: $arg(S_{11})$, $arg(S_{12})$, $arg(S_{13})$ in Abhängigkeit von der Frequenz; Erläuterungen wie bei Abb. 31)



(Abb. 33: $|S_{11}|$, $|S_{12}|$, $|S_{13}|$ der Zirkulatoranordnung Abb. 26 (äußeres Feld B_4 = 0,095 Vs/m^2) in Abhängigkeit von der Frequenz; berechnete Werte ○ ; gemessene Werte ● sind nur eingezeichnet, falls sie sich von den berechneten unterscheiden)



(Abb. 34: arg(S_{11}), arg(S_{12}), arg(S_{13}) in Abhängigkeit von der Frequenz; Erläuterungen wie bei Abb. 33)



(Abb. 35: V = 1 - $|S_{11}|^2$ - $|S_{12}|^2$ - $|S_{13}|^2$ in Abhängigkeit von der Frequenz und vom Zusatzfeld; B_1 ... B_4 siehe Abb. 27 - 34)

6.3.3. Dimensionierung von Anpassungszweitoren für eine Zirkulatorsynthese

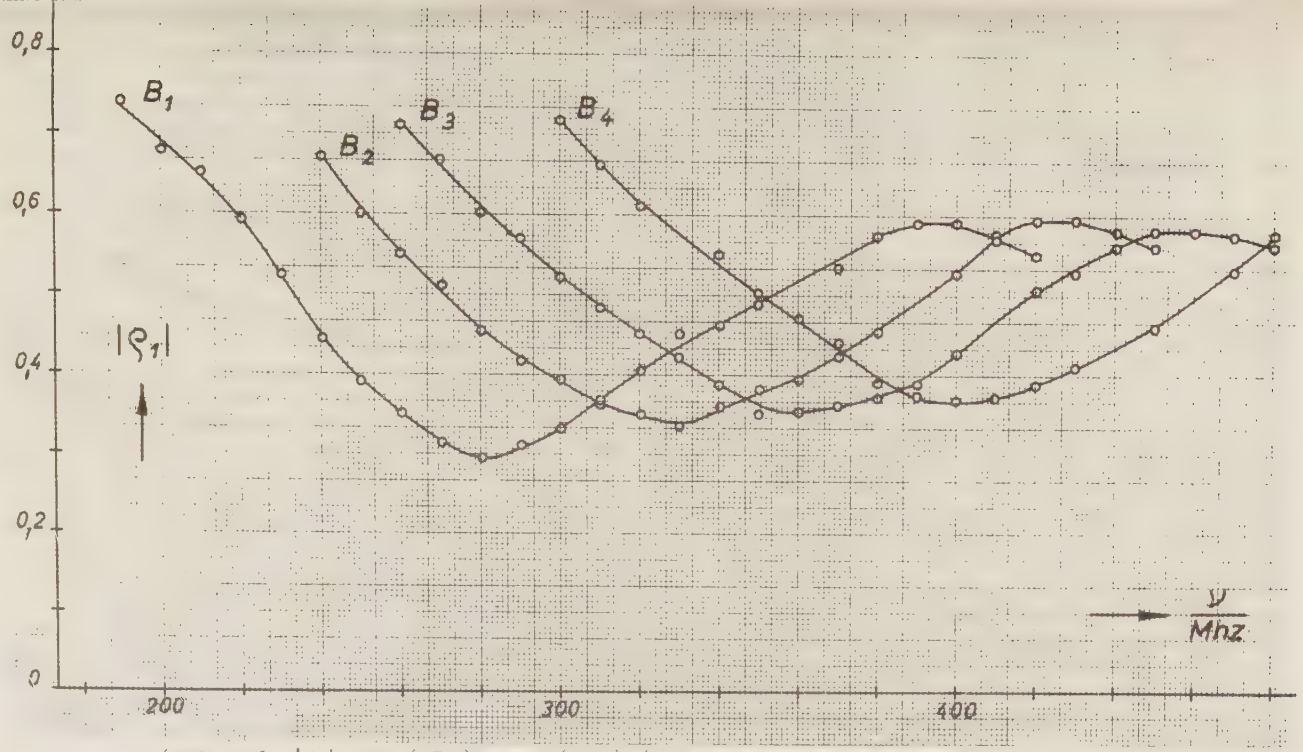
6.3.3.1. Vorbemerkungen über bisherige Versuche

Das Problem der Synthese von Zirkulatoren aus gewissen nichtreziproken Dreitoren mit Hilfe von Anpassungszweitoren ist seit längerer Zeit bekannt und unter verschiedenen Aspekten bearbeitet worden. In [16], [24], [26] werden Bedingungen berechnet, die verlustlose Dreitore und verlustlose Anpassungszweitore erfüllen müssen, damit eine Zirkulatorsynthese möglich ist. In [29] geht Schwartz auf das Problem der breitbandigen Synthese ein und zeigt anknüpfend an [26] die Möglichkeiten einer breitbandigen Impedanztransformation für eine Zirkulatorsynthese durch Bezugsimpedanzwechsel auf. Auch hier liegt die Theorie verlustloser, zyklisch symmetrischer Dreitore zugrunde. Noch eingehender wird die Breitbandsynthese vom gleichen Verfasser in [30] bearbeitet, wobei das frequenzabhängige Verhalten des Zirkulators näherungsweise durch das eines Ersatzserienkreises aus konzentrierten Schaltelementen beschrieben wird. Die Voraussetzung der Verlustlosigkeit des zugrundeliegenden Dreitors wird zum ersten Mal von Schwartz in [28] fallengelassen. Im Rahmen des Impedanzmatrixformalismus werden die Leistungsübertragungsverhältnisse eines durch Bezugsimpedanzwechsel realisierten Zirkulators berechnet. Verluste der für die Impedanztransformation notwendigen Zweitore werden nicht berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit wird nach Wissen des Verfassers das Anpassungsproblem zum ersten Mal ohne die Voraussetzungen der Verlustlosigkeit des zugrundeliegenden Dreitors und der Anpassungszweitore allgemein berechnet (siehe 5.4.4.), woraus sich neue Gesichtspunkte für die Dimensionierung der letzteren ergeben. Die Zirkulatorsynthese als Anpassungsproblem ist auf eine Zweitorsynthese mit vorgegebenen Eigenschaften zurückgeführt, die aus den Streumatrixelementen des zugrundeliegenden nichtreziproken, zyklisch symmetrischen Dreitors berechnet werden können. Die Auswirkung von Verlusten kann berechnet und eventuell zur Realisierung einer günstigeren Leistungsanpassung verwendet werden.

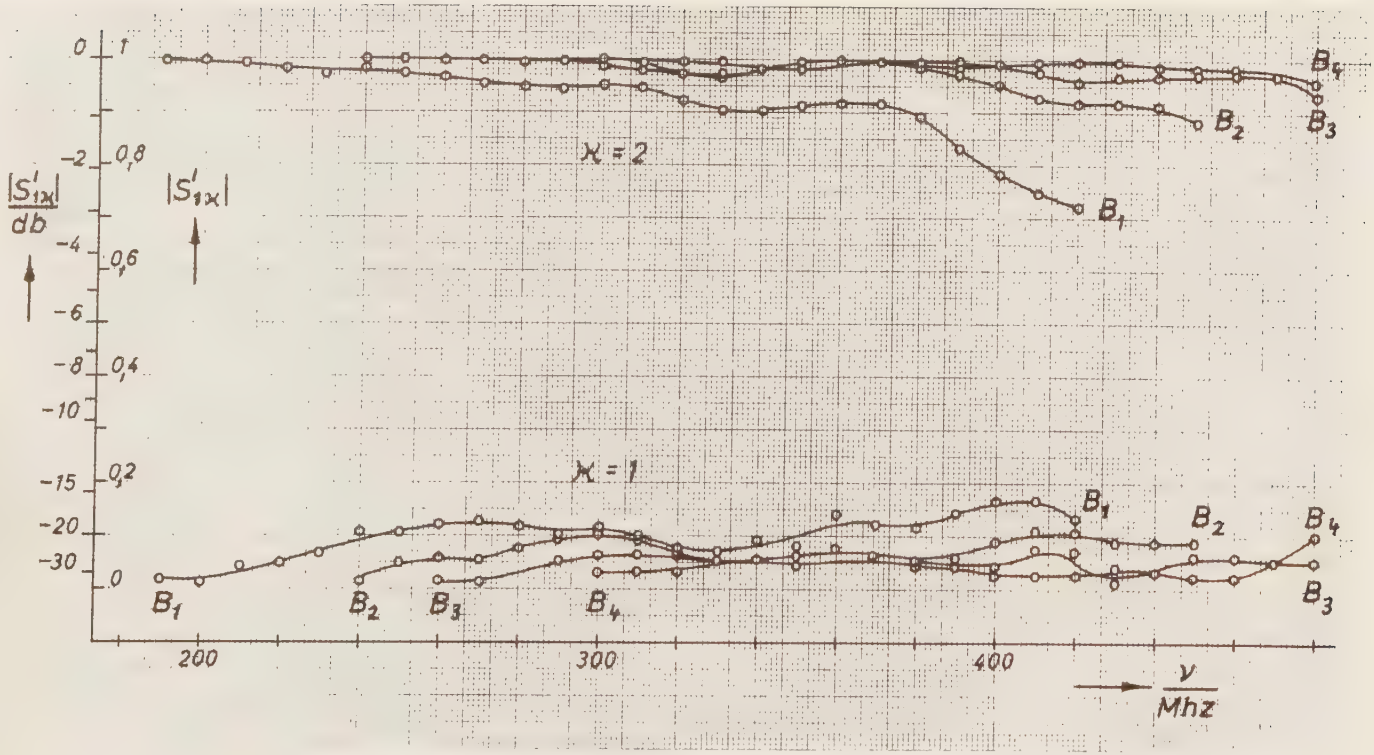
6.3.3.2. Zirkulatorsynthese durch verlustlose Anpassungszweitore

Mit den Ergebnissen von 6.3.2. prüft man zunächst an Hand von (264) bzw. (271), ob eine ideale Sperrdämpfung zweier benachbarter Tore durch eine neue passive Bezugsimpedanz realisierbar ist. Äquivalent dazu ist die Untersuchung der Frage, ob es verlustlose Anpassungszweitore (Streumatrix $\underline{T}$ aus (273)) mit $|\rho_1| < 1$ gibt, wenn ρ_1 entweder durch (278) oder (284) gegeben ist. Abb. 36 zeigt $|\rho_1|$ in Abhängigkeit von der Frequenz und vom Magnetfeld, wobei nur die dem Betrage nach kleiner als eins ausfallenden Werte gezeichnet sind. Man verifiziert übrigens leicht, daß bei geeigneter Tornumerierung die Ungleichungen (268) oder sogar (267) in der Umgebung der Maxima von $|S_{12}|$ (Abb. 27, 29, 31, 33) erfüllt sind, womit die Zirkulatorsynthesemöglichkeiten zusätzlich bestätigt werden. Die günstigstenfalls erreichbaren Beträge der Streumatrixelemente des Zirkulators erhält man am einfachsten bei Betrachtung des Bezugsimpedanzwechsels. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $S'_{13} = 0$ realisiert, dann folgen $|S'_{11}|$ und $|S'_{12}|$ aus (256) und (257). In Abb. 37 sind die Ergebnisse der Untersuchungen am Meßobjekt für Zusatzfelder B_i (i=1..4) (siehe Abb. 27 - 33) dargestellt. Die Verluste des zugrundeliegenden Dreitors erweisen sich als so geringfügig, daß die Durchlaßdämpfung für B_2, B_3 und B_4 kleiner als 1 db ist und bei B_1 erst für höhere Frequenzen (oberhalb von 370 MHz) 1 db überschreitet. Die Leistungsfehlanpassung $|S'_{11}|$ ist für B_2, B_3 und B_4 kleiner als 0,1 (Stehwellenverhältnis $\leq 1{,}22$), für B_1 kleiner als 0,15 (Stehwellenverhältnis $\leq 1{,}36$). Man prüft leicht nach, daß Ungleichung (288) im allgemeinen erfüllt ist. Bei scheinbaren Verletzungen müssen die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Punkte in Abb. 37 berücksichtigt werden, sie liegen in der Größenordnung $\pm$ 0,03.

Bei verlustlosen Anpassungszweitoren (Streumatrix $\underline{T}$ aus (273)) sind die Matrixelemente ρ_2 und τ nach Vorgabe von ρ_1 durch (285) - (287) festgelegt. Wegen der zulässigen Unsymmetrie ist noch ein Freiheitsgrad bei der Wahl der Phasen von ρ_2 und



(Abb. 36: $|\varrho_1|$ aus (278) bzw. (284) (geeignete Tornumerierung vorausgesetzt) in Abhängigkeit von der Frequenz und vom Zusatzfeld;
B_1 ... B_4 siehe Abb. 27 - 34)



(Abb. 37: Durch verlustlose Transformation erreichbare Werte von $|S'_{11}|$ und $|S'_{12}|$ bei $S'_{13} = 0$, $B_1 \ldots B_4$ siehe Abb. 27 - 34)

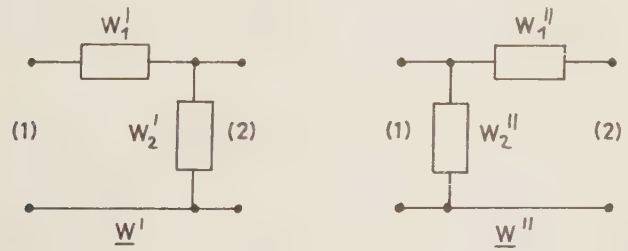
τ gegeben (siehe (287)). $\underline{T}$ hat also die Form

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} |\varrho_1| \exp(i\varphi_{\varrho_1}) & \sqrt{1-|\varrho_1|^2}\exp(i\varphi_\tau) \\ \sqrt{1-|\varrho_1|^2}\exp(i\varphi_\tau) & |\varrho_1|\exp(i(2\varphi_\tau - \varphi_{\varrho_1} + \pi)) \end{pmatrix} \qquad (325)$$

mit ϱ_1 aus (278) oder (284) und frei wählbarem φ_τ. Für eine netzwerktheoretische Synthese des Zweitors berechnet man zweckmäßig die zugehörige Impedanzmatrix $\underline{W}$ mit (68), an beiden Toren sei eine reelle Bezugsimpedanz R vorausgesetzt,

$$\underline{W} = \frac{i\,R}{\sin\varphi_\tau + |\varrho_1|\sin(\varphi_{\varrho_1} - \varphi_\tau)} \begin{pmatrix} \cos\varphi_\tau + |\varrho_1|\cos(\varphi_{\varrho_1} - \varphi_\tau) & \sqrt{1-|\varrho_1|^2} \\ \sqrt{1-|\varrho_1|^2} & \cos\varphi_\tau - |\varrho_1|\cos(\varphi_{\varrho_1} - \varphi_\tau) \end{pmatrix} \qquad (326)$$

und prüft nun, ob man mit einer möglichst geringen Zahl von verlustlosen Schaltelementen bei einer Realisierung auskommt.



(Abb. 38: Anpassungszweitore aus zwei Impedanzen)

Die einfachsten Anpassungszweitore bestehen aus zwei Impedanzen und haben die in Abb. 38 dargestellten Formen, deren Impedanzmatrizen lauten

$$\underline{W}' = \begin{pmatrix} W_1' + W_2' & W_2' \\ W_2' & W_2' \end{pmatrix} \qquad \underline{W}'' = \begin{pmatrix} W_2'' & W_2'' \\ W_2'' & W_1'' + W_2'' \end{pmatrix} \qquad (327)$$

Identifiziert man $\underline{W}$ aus (326) mit $\underline{W}'$ oder $\underline{W}''$, so muß $W_{12} = W_{22}$ oder $W_{12} = W_{11}$ erfüllt sein, mit (326) folgt daraus

$$\sqrt{1-|\rho_1|^2} = \cos(\varphi_\tau)\,(\mp)\,|\rho_1|\cos(\varphi_{\rho_1}-\varphi_\tau) \qquad (328)$$

Das Minuszeichen steht bei $W_{12} = W_{22}$, das Pluszeichen bei $W_{12} = W_{11}$. Da ρ_1 bereits festliegt, stellt (328) eine Bestimmungsgleichung für φ_τ dar. Auflösen nach $\cos(\varphi_\tau)$ führt zu einer quadratischen Gleichung mit den Lösungen

$$\cos(\varphi_\tau) = \frac{\sqrt{1-|\rho_1|^2}\;(\mp)\,\mathrm{Re}(\rho_1) \pm \sqrt{\;\mathrm{Im}(\rho_1)\sqrt{|\rho_1|^2(\mp)\,\mathrm{Re}(\rho_1)}}}{1\,(\mp)\,2\,\mathrm{Re}(\rho_1)+|\rho_1|^2} \qquad (329)$$

die natürlich nur für

$$|\rho_1|(\mp)\cos(\varphi_{\rho_1}) \geq 0 \quad ; \quad |\cos(\varphi_\tau)| \leq 1 \qquad (330)$$

existieren. Wenn alle vier Vorzeichenkombinationen in (329) einen Wert des φ_τ liefern, aus denen man φ_τ selbst jeweils zweideutig erhält, dann gibt es maximal acht mögliche Realisierungen verlustloser Anpassungszweitore nach Abb. 38 (je vier des Typs $\underline{W}'$ und $\underline{W}''$). Die Reaktanzen, aus denen sie gebildet sind, kann man mit (326) und (327) berechnen.

Selbstverständlich sind die Synthesemöglichkeiten durch die Bedingungen (330) eingeengt. Faßt man die Anpassungszweitore als Impedanztransformatoren auf, so entspricht die Einengung der Synthesemöglichkeiten der Beschränkung auf einen durch die zwei Reaktanzen genau vorgeschriebenen Transformationsweg in der Impedanzebene. (Zur geometrischen Veranschaulichung der Transformation siehe z.B. [22]). Beliebig viele Transformationswege zur Herstellung einer vorgeschriebenen Impedanz aus einer zweiten sind erst mit drei Reaktanzen realisierbar. Erst dann wird auch die Mannigfaltigkeit von Zirkulatorsynthesemöglichkeiten beliebig groß. Daß eine praktische Anpassung mit drei Impedanzen eventuell Vorteile gegenüber einer mit zweien besitzt, beruht darauf, daß Zweitore aus drei realen Reaktanzen unter Umständen geringere Verluste verursachen, wenn man ein festes Anpassungsproblem zugrundelegt. Näheres im folgenden Abschnitt.

6.3.3.3. Berechnung verlustbehafteter Anpassungszweitore für eine Zirkulatorsynthese mit $S'_{11} = 0$

Nach Abschnitt 5.4.4. ist eine Zirkulatorsynthese aus verlustbehafteten zyklisch symmetrischen Dreitoren höchstens dann mit $S'_{11} = 0$ durchführbar, wenn die passiven Anpassungszweitore selbst verlustbehaftet sind. Nachteil bei einer solchen Synthese ist, daß die Verluste der Zweitore zu Lasten des Übertragungskoeffizienten $|S'_{12}|$ gehen, wenn man annimmt, daß S'_{13} verschwindet. Da praktisch realisierbare Anpassungszweitore immer gewisse Verluste aufweisen, ist es wünschenswert, diese zum Verkleinern der bei verlustloser Impedanztransformation auftretenden Fehlanpassung $|S'_{11}|$ zu benutzen. Für das vorliegende Meßobjekt soll nun $|S'_{12}|$ unter der Voraussetzung berechnet werden, daß man $S'_{11} = S'_{13} = 0$ mit verlustbehafteten Anpassungszweitoren erzielt.

Generell ist der für eine ideale Sperrdämpfung ($S'_{13} = 0$ oder $S'_{12} = 0$) erforderliche Wert von ρ_1 der Zweitore durch (278) oder (284) gegeben. Zusätzliches $S'_{11} = 0$ bedeutet nach (275)

$$\rho_2 = x\,\tau^2; \quad x = \pm \frac{(S_{11}S_{12} - S_{13}^2)(S_{11}S_{13} - S_{12}^2)}{S_{12}^3 - S_{13}^3} \qquad \begin{matrix} + : S'_{13} = 0 \\ - : S'_{12} = 0 \end{matrix} \tag{331}$$

Die zur Streumatrix $\underline{T}$ der Zweitore (siehe (273)) gehörige Impedanzmatrix $\underline{W}$ berechnet man mit (68), an beiden Toren sei die reelle Bezugsimpedanz R vorausgesetzt

$$\underline{W} = \frac{R}{1 - \rho_1 - \rho_2 + \rho_1\rho_2 - \tau^2} \begin{pmatrix} 1 + \rho_1 - \rho_2 - \rho_1\rho_2 + \tau^2 & 2\tau \\ 2\tau & 1 - \rho_1 + \rho_2 - \rho_1\rho_2 + \tau^2 \end{pmatrix} \tag{332}$$

Will man sie mit zwei Impedanzen realisieren (siehe Abb. 38), so ergibt ein Vergleich von (332) mit (327) die Bedingung

$$2\tau = 1 \overset{-}{(+)} (\rho_1 - \rho_2) - \rho_1\rho_2 + \tau^2 \tag{333}$$

Das Minuszeichen erhält man beim Identifizieren von (332) mit

$\underline{W}'$, das Pluszeichen für den Fall $\underline{W}''$. Einsetzen von (331) in (333) und Auflösen nach τ liefert

$$\tau = \frac{1 \pm \sqrt{(\mp)\,(x(\rho_1 \mp 1)^2 - \rho_1)}}{1 - x(\rho_1 \mp 1)} \qquad (334)$$

Die Doppeldeutigkeit des Wurzelvorzeichens bedeutet, daß es für jede Vorzeichenwahl in (333) eventuell zwei Lösungen gibt. Damit die Zweitore passiv realisierbar sind, muß (282) erfüllt sein. Die Impedanzen W_1', W_2' bzw. W_1'', W_2'' erhält man als Funktionen von ρ_1, ρ_2 und τ mit Hilfe von (327) und (332). Wegen der Nebenbedingung (333) kann man ρ_2 eliminieren

$$W_1' = (1 + \rho_1 - \tau)/(1 - \rho_1) \qquad W_2' = \tau/(1 - \rho_1 - \tau) \qquad (335)$$

$$W_1'' = (1 + \rho_1 - \tau)/\tau \qquad W_2'' = (1 + \rho_1)/(1 - \rho_1 - \tau) \qquad (336)$$

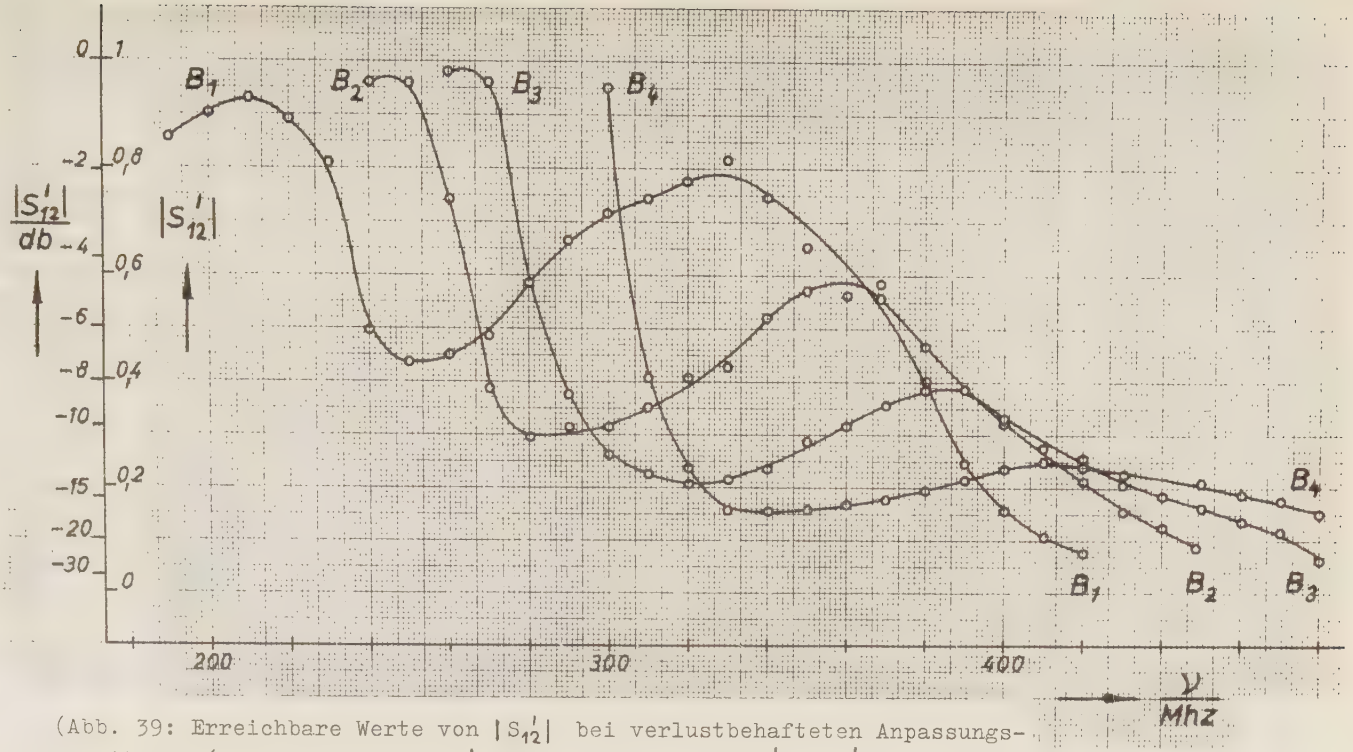
In (335) müssen für τ die Werte eingesetzt werden, die sich aus (334) bei Wahl des Minuszeichens ergeben (Wurzelvorzeichen beliebig), in (336) stehen die Werte von τ, die man aus (334) mit dem Pluszeichen berechnet (Wurzelvorzeichen wieder beliebig). S_{12}' und S_{13}' des neuen Gesamtdreitors ergeben sich aus (276) und (277) als Funktionen von τ, wenn man ρ_1 aus (278) oder (284) einsetzt

$$S_{12}' = (S_{11}S_{13} - S_{12}^2)^2\tau^2/(S_{12}^3 - S_{13}^3) \quad ; \quad S_{13}' = 0 \qquad (337)$$

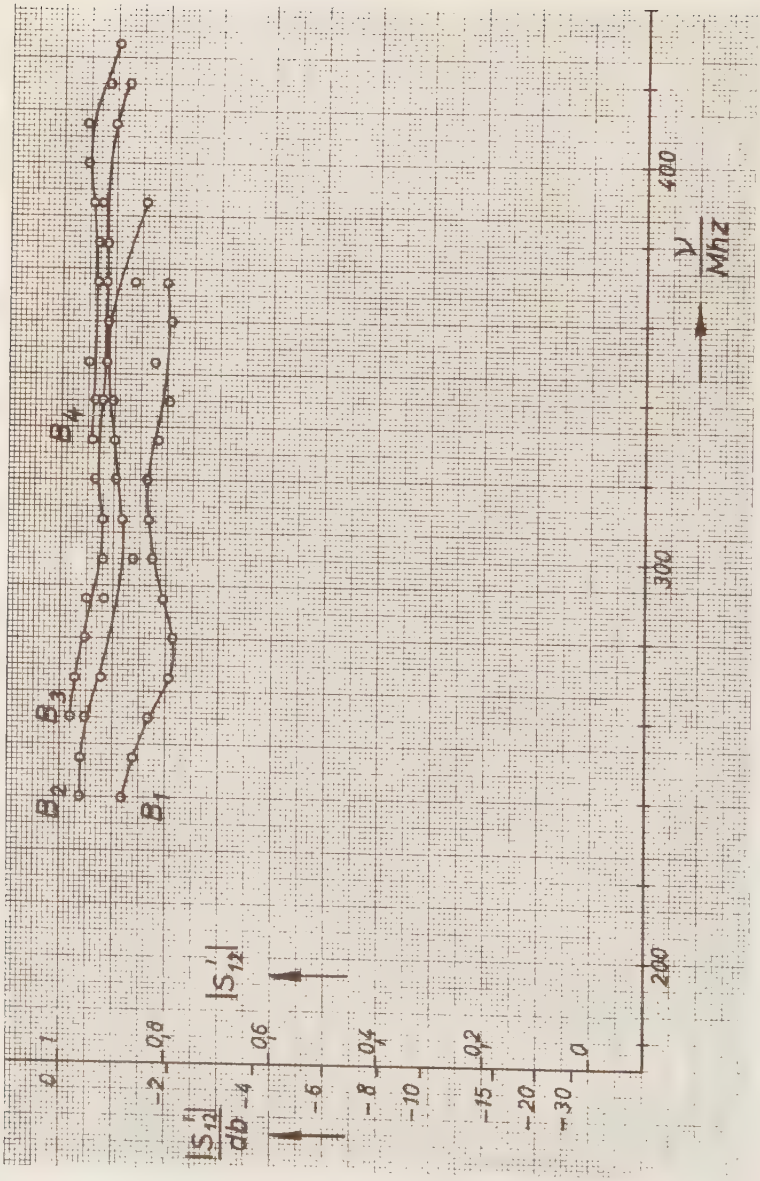
oder

$$S_{13}' = (S_{11}S_{12} - S_{13}^2)^2\tau^2/(S_{13}^3 - S_{12}^3) \quad ; \quad S_{12}' = 0 \qquad (338)$$

Auf Grund der geforderten Passivität der Anpassungszweitore ist mit einer Einschränkung der Lösungsmöglichkeiten zu rechnen. Die Auswertung der Messung an dem vorliegenden Dreitor bestätigt diese Vermutung. Die Abb. 39 und 40 zeigen die nach einer Anpassung mit verlustbehafteten Zweitoren aus zwei Impedanzen erreichbaren nichtverschwindenden Übertragungsfaktoren $|S_{12}'|$, wenn $S_{11}' = S_{13}' = 0$ gilt. Die Lösungsmöglichkeiten bleiben auf gewisse Frequenzbereiche beschränkt. Abb. 39 zeigt, daß eine Anpassung mit geeigneten verlustbehafteten $\underline{W}'$ (ver-



(Abb. 39: Erreichbare Werte von $|S'_{12}|$ bei verlustbehafteten Anpassungszweitoren (Impedanzmatrizen $\underline{W}'$ nach Abb. 38), die $S'_{11} = S'_{13} = 0$ realisieren; $B_1 \ldots B_4$ siehe Abb. 27 - 34)



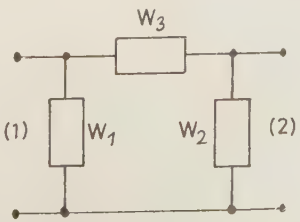
(Abb. 40: Erreichbare Werte von $|S'_{12}|$ bei verlustbehafteten Anpassungszweitoren (Impedanzmatrizen $\underline{W}''$ nach Abb. 38), die $S'_{11} = S'_{13} = 0$ realisieren; B_1 ... B_4 siehe Abb. 27 - 34)

gleiche Abb. 38) nicht günstig ist, da die Durchgangsdämpfung des Gesamtdreitors sehr groß wird. Dagegen verspricht eine Anpassung mit geeigneten verlustbehafteten $\underline{W}''$ Aussicht auf Erfolg, da die Beträge von S'_{12} der Abb. 40 sich nur wenig von den in Abb. 37 dargestellten Werten unterscheiden, die man bei verlustloser Anpassung erreicht. Die Durchgangsdämpfung des Gesamtdreitors ist stets kleiner als 2 db.

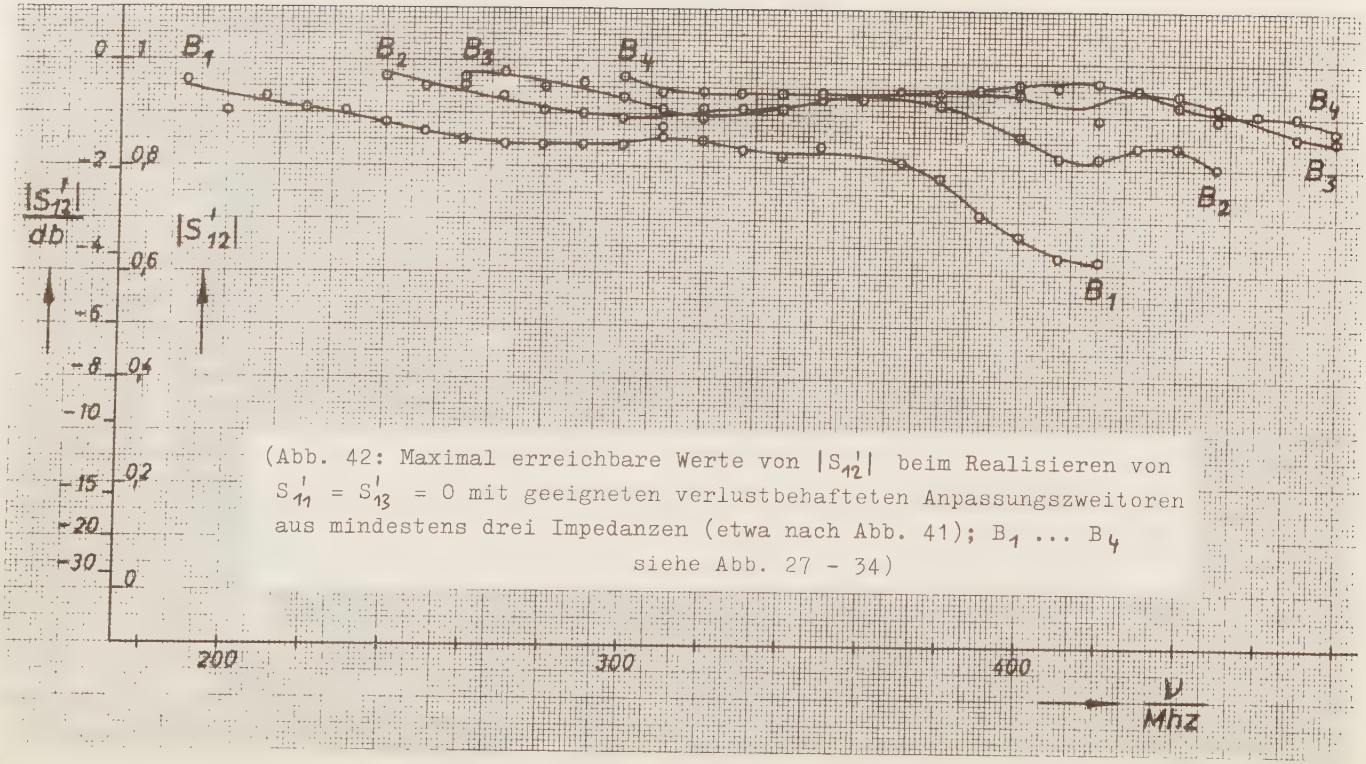
Unbefriedigend bei der Anpassung mit zwei verlustbehafteten Impedanzen ist, daß unklar bleibt, ob die für $|S'_{12}|$ erreichten Werte (bei $S'_{11} = S'_{13} = 0$) die größtmöglichen sind. Man wird daher prüfen, ob eine Anpassung mit anderen passiven Zweitoren (eventuell aus drei verlustbehafteten Impedanzen) zu größeren $|S'_{12}|$ als in Abb. 40 führt. Zur Berechnung dieses Problems verfährt man wie folgt: ς_1 ist durch (278) oder (284) gegeben, ς_2 berechnet man aus (331), wenn $|\tau|$ bekannt ist. Für die Realisierung eines möglichst großen $|S'_{12}|$ muß $|\tau|$ maximal werden (siehe (337) bzw. (338)). Mit (282) prüft man leicht nach, daß zumindest

$$|\tau| < \sqrt{1 - |\rho_1|^2} \tag{339}$$

gelten muß. In einem Iterationsverfahren bestimmt man nun numerisch ein maximal realisierbares $|\tau|$, indem man (278) bzw. (284) und (331) in (282) einsetzt und für $|\tau|$ ausgehend von (339) schrittweise kleiner werdende Werte einsetzt, bis die Eigenwerte (282) positiv sind. Auf eine strenge Lösung des Extremalproblems wird wegen der Aufwendigkeit verzichtet. Nach Vorgabe eines frei wählbaren φ_τ kann man die Impedanzmatrix der Zweitore mit (332) berechnen, die man nun z.B. durch eine π -Ersatzschaltung nach Abb. 41 realisieren kann. Deren Impedanzmatrix



(Abb. 41: π -Ersatzschaltung eines Anpassungszweitors)



(Abb. 42: Maximal erreichbare Werte von $|S'_{12}|$ beim Realisieren von $S'_{11} = S'_{13} = 0$ mit geeigneten verlustbehafteten Anpassungszweitoren aus mindestens drei Impedanzen (etwa nach Abb. 41); $B_1 \ldots B_4$ siehe Abb. 27 - 34)

$$\underline{W} = \frac{1}{W_1 + W_2 + W_3} \begin{pmatrix} W_1(W_2 + W_3) & W_1 W_2 \\ W_1 W_2 & W_2(W_1 + W_3) \end{pmatrix} \qquad (340)$$

lautet (W_1, W_2 und W_3 aus Abb. 41). Die W_i als Funktionen der vorher bestimmten Impedanzmatrix $\underline{W}$ ergeben sich zu

$$W_1 = (W_{12}^2 - W_{11} W_{22})/(W_{12} - W_{22}) \qquad (341)$$

$$W_2 = (W_{12}^2 - W_{11} W_{22})/(W_{12} - W_{11}) \qquad (342)$$

$$W_3 = (W_{12}^2 - W_{11} W_{22})/(-W_{12}) \qquad (343)$$

Unabhängig von einer konkreten Zweitorrealisierung sind in Abb. 42 die maximal erreichbaren Werte von $|S'_{12}|$ bei Anpassung mit passiven Elementen für das vorliegende Meßobjekt aufgetragen, S'_{11} und S'_{13} verschwinden. Ein Vergleich mit Abb. 40 zeigt, daß die maximalen Werte von $|S'_{12}|$ nur wenig größer als die bei Anpassung mit zwei Impedanzen tatsächlich erreichten sind. Abb. 42 enthält jedoch keine Beschränkung der Frequenzbereiche für Lösungsmöglichkeiten, wie das in Abb. 40 der Fall ist. Wichtigstes Ergebnis des Vergleichs der Abb. 40 und 42 ist, daß man durch Anpassung mit drei Impedanzen eventuell ein besseres Übertragungsverhalten realisieren kann als mit zweien. Beim vorliegenden Meßobjekt dürfte eine Anpassung mit zwei Impedanzen genügen, sofern bei der Betriebsfrequenz eine Lösung existiert.

6.3.3.4. Optimierungsverfahren zur Synthese der Anpassungszweitore

Aus den Überlegungen der letzten beiden Abschnitte ergeben sich Gesichtspunkte für eine Optimierung realer passiver Anpassungszweitore. Die Ziele sind in erster Linie eine möglichst genaue Realisierung von ϱ_1 ((278) oder (284)) zum Erreichen maximaler Sperrdämpfung und gleichzeitig die Verwirklichung eines möglichst großen $|\tau|$, damit der nichtverschwindende Übertragungsfaktor $|S'_{12}|$ (oder $|S'_{13}|$) maximal wird. In zwei-

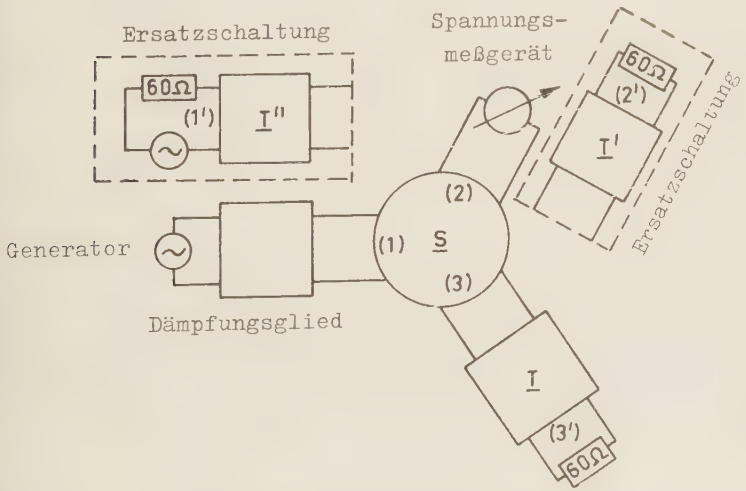
ter Linie wird man versuchen, die Leistungsfehlanpassung $|S'_{11}|$ zum Verschwinden zu bringen. Das letztgenannte Problem erübrigt sich, wenn das zugrundeliegende Dreitor verlustlos ist, also wird man das Bauelement zunächst im Hinblick auf Verluste prüfen. Dazu dient die Berechnung der Größe $V = 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2 - |S_{13}|^2$, die bei Verlustlosigkeit verschwinden muß. Abb. 35 zeigt die Ergebnisse für das untersuchte Meßobjekt, und man erkennt deutlich, daß zumindest bei Zusatzfeldern B_1 und B_2 merkliche Verluste auftreten. In diesen Fällen wird es also zweckmäßig sein, eine Anpassung mit verlustbehafteten Impedanzen zu versuchen (falls $|S'_{12}|$ bzw. $|S'_{13}|$ groß genug bleibt), während für B_3 und B_4 die Theorie der verlustlosen Anpassung zur Dimensionierung von Impedanzen eventuell ausreicht. Abb. 37 ergänzt diese Voruntersuchung, sie zeigt die zu erwartende Leistungsübertragung und -fehlanpassung bei verlustlosen Transformationszweitoren.

Bei Anpassung mit (theoretisch) verlustlosen Impedanzen hängt die Qualität einer Zweitorrealisierung von den Güten der verwendeten Schaltelemente ab. Wegen der endlichen Güte realer Reaktanzen kann man eine Optimierung im Hinblick auf kleinste Verluste, d.h. kleinste Durchlaßdämpfung vornehmen. Bei Verwenden von nur zwei realen Reaktanzen gibt es nach 6.3.3.2. nur eine begrenzte Anzahl von Möglichkeiten einer Zirkulatorsynthese. Läßt man dagegen drei Reaktanzen zu, so kann man auf Grund der freien Wählbarkeit von φ_τ beliebig viele Tripel für eine Zirkulatorsynthese berechnen und aus ihnen solche auswählen, die in der Praxis zu kleineren Verlusten führen, als es mit zwei Reaktanzen der Fall wäre. Daß das eventuell möglich ist, zeigt der Vergleich von Abb. 40 und 42. Eine 'verlustbehaftete Anpassung' mit drei realen Reaktanzen kann günstiger sein als eine mit zwei realen Reaktanzen.

Anpassung mit von vornherein verlustbehaftet angenommenen Zweitoren ist, wie schon zu Beginn erwähnt, nur bei verlustbehafteten Dreitoren sinnvoll. Es muß zunächst rechnerisch geprüft werden, ob die Verluste der Anpassungszweitore zum Erreichen von $S'_{11} = 0$ nicht zu untragbaren Verlusten beim Übertragungskoeffizienten $|S'_{12}|$ bzw. $|S'_{13}|$ des Gesamtdreitors führen. Dazu

benutzt man das in 6.3.3.3. beschriebene Iterationsverfahren zur Bestimmung eines maximalen $|\tau|$, womit man den größten erreichbaren Wert von $|S'_{12}|$ oder $|S'_{13}|$ berechnen kann. Die zugehörigen Anpassungszweitore lassen sich im allgemeinen nur aus drei Impedanzen herstellen, bei einer Synthese aus zwei Impedanzen erreicht man meistens keine optimale Leistungsübertragung (vergleiche Abb. 40 und 42).

Zur meßtechnischen Optimierung benutzt man zweckmäßig das in [29] angegebene Verfahren. Es wurde vom Verfasser nicht experimentell angewendet, soll aber noch kurz besprochen werden. Die Methode gestattet die Optimierung jeweils eines einzelnen der drei für die Synthese notwendigen Zweitore. Das zugrundeliegende Dreitor wird am Tor 1 über ein Dämpfungsglied mit einem Generator, am Tor 2 mit einem Spannungsmeßgerät (das mit dem Ohmschen Anteil seines Innenwiderstandes als 'Leistungsindikator' dient) und am Tor 3 mit dem zu optimierenden Anpassungszweitor verbunden, dessen zweites Tor mit dessen Bezugsimpedanz abgeschlossen wird (siehe Abb. 43). Durch die Abschlüsse tritt ei-



(Abb. 43: Meßanordnung zur Optimierung des Anpassungszweitors T (nach [29]))

ne Transformation $\underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ ein, die man mit Hilfe von (240) berechnet (Bezugsimpedanz von $\underline{S}$ und $\underline{S}'$ ist $60\,\Omega$). Betrachtet man in Abb. 43 statt des Generators am Tor 1 und des Spannungsmeßgeräts am Tor 2 deren Ersatzschaltbilder in den gestrichelt umrandeten Rechtecken, so liegt eine Schaltung des Typs Abb. 14 vor, die zusätzlich mit der (für alle Tore gleichen) Bezugsimpedanz abgeschlossen ist. Die Streumatrix des Anpassungssechstors lautet in Analogie zu (274)

$$\underline{S}_A = \begin{pmatrix} \varrho_1'' & 0 & 0 & \tau'' & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_1' & 0 & 0 & \tau' & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_1 & 0 & 0 & \tau \\ \tau'' & 0 & 0 & \varrho_2'' & 0 & 0 \\ 0 & \tau' & 0 & 0 & \varrho_2' & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & \varrho_2 \end{pmatrix} \qquad (344)$$

sie ist jedoch nicht zyklisch symmetrisch. Die Elemente von $\underline{S}'$, das in Abb. 43 das um die Zweitore erweiterte Dreitor beschreibt, berechnet man analog zu (275) - (277) mit Hilfe von (240). Falls $\underline{T}$ ein ϱ_1 nach (278) ($|\varrho_1| < 1$) besitzt, verschwindet genau das Matrixelement S'_{21}, so daß keine Leistungswelle vom Tor ($1'$) zum Tor ($2'$) und damit auch nicht zur Anzeige am Spannungsmeßgerät gelangt. Da Tor ($3'$) leistungsmäßig angepaßt ist, gelangt auch keine Leistungswelle von ($3'$) nach ($2'$), so daß das Spannungsmeßgerät im Idealfall stromlos bleibt. Eine Optimierung von $\underline{T}$ bezüglich ϱ_1 erfolgt also durch Abgleich der Impedanzen, die $\underline{T}$ realisieren, auf Spannungsminimum am Tor (2). Ist der Drehsinn des Zirkulators zunächst nicht bekannt, so kann es vorkommen, daß der Abgleich nicht gelingt. Das ist ein Indiz dafür, daß $|\varrho_1|$ aus (278) größer als eins ist. Falls jedoch $|\varrho_1|$ aus (284) kleiner eins ist, kann man eine Zirkulatorsynthese mit umgekehrtem Drehsinn durchführen. Für eine Optimierung von $\underline{T}$ sind nun in Abb. 43 die Abschlüsse der Tore 2 und 3 zu vertauschen.

Über das eben besprochene Verfahren hinaus kann man eine meßtechnische Optimierung der Anpassungszweitore bezüglich $|\tau|$ unabhängig vom zugrundeliegenden Dreitor durchführen. In einer Brückenschaltung gleicht man die Impedanzen so ab, daß der Über-

tragungskoeffizient maximal, d.h. die Durchgangsdämpfung minimal wird. Eine solche Optimierung ist nur dann sinnvoll, wenn beim Abgleich die Bedingungen für eine Realisierung von ϱ_1 wenigstens annähernd erfüllt bleiben. Da ϱ_1 und $|\tau|$ stets Funktionen aller das Zweitor realisierenden Impedanzen sind, wenn man Schaltungen nach Abb. 38 oder 41 baut, ist ein unabhängiger Abgleich jeder einzelnen Größe prinzipiell nicht möglich. Daher beschränkt man sich zweckmäßig auf die experimentelle Optimierung von ϱ_1 (d.h. maximale Sperrdämpfung zweier Tore), wenn man zuvor rechnerisch die Möglichkeiten für ein günstigstes $|\tau|$ geprüft hat.

Anhang

Beweis von Gleichung (197)

Zur Berechnung der Eigenwerte der Streumatrix (187) betrachtet man das charakteristische Polynom

$$\det \begin{pmatrix} S_{11}-\delta & S_{12} & S_{13} & \cdots\cdots & S_{1n} \\ S_{1n} & S_{11}-\delta & S_{12} & \cdots\cdots & S_{1n-1} \\ S_{1n-1} & S_{1n} & S_{11}-\delta & \cdots\cdots & S_{1n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{12} & S_{13} & S_{14} & \cdots\cdots & S_{11}-\delta \end{pmatrix} = 0 \qquad (345)$$

Nach Addition der zweiten, dritten, vierten bis n-ten Spalte zur ersten, wodurch der Wert der Determinante nicht geändert wird, sind die Elemente der ersten Spalte alle gleich

$$\sum_{\mu=1}^{n} S_{1\mu} - \delta \qquad (346)$$

was als Faktor vor die Determinante gezogen werden kann. Man erhält somit als erste Nullstelle von (345) und Eigenwert von $\underline{S}$

$$\sigma_1 = \sum_{\mu=1}^{n} S_{1\mu} \tag{347}$$

Zur Berechnung von σ_2 multipliziert man die Determinante (345) zunächst mit

$$1 \cdot \exp(i2\pi/n) \cdot \exp(i4\pi/n) \ldots\ldots \exp(i(n-1)2\pi/n) = \begin{matrix} +1 \text{ (n ungerade)} \\ -1 \text{ (n gerade)} \end{matrix} \tag{348}$$

Die n Faktoren des Produkts benutzt man in ihrer durch (348) vorgegebenen Reihenfolge als Multiplikatoren der Spalten 1...n (Faktor 1 in Spalte 1, Faktor $\exp(i2\pi/n)$ in Spalte 2 usw.). Nun addiert man wieder die zweite bis n-te Spalte zur ersten und erkennt, daß die so konstruierte Spalte die Terme

$$\exp(i(\varkappa-1)2\pi/n)\left[\sum_{\mu=1}^{n} S_{1\mu} \exp(i(\mu-1)2\pi/n) - \sigma\right] \tag{349}$$

enthält, wobei $\varkappa$ der Zeilenindex ist und von 1 bis n läuft. Den Klammerausdruck kann man als gemeinsamen Faktor der Spalte vor die Determinante schreiben, und man erhält so die zweite Nullstelle von (345)

$$\sigma_2 = \sum_{\mu=1}^{n} S_{1\mu} \exp(i(\mu-1)2\pi/n) \tag{350}$$

Allgemein konstruiert man den ν-ten Eigenwert σ_ν $(1 \leq \nu \leq n)$, indem man (345) mit

$$1 \cdot \exp(i(\nu-1)2\pi/n) \cdot \exp(i(\nu-1)4\pi/n) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \exp(i(\nu-1)(n-1)2\pi/n) = +1 \text{ oder } -1 \tag{351}$$

multipliziert und die n Faktoren in der Reihenfolge von (351) als Multiplikatoren der Spalten 1...n benutzt. Nach Addition der zweiten bis n-ten Spalte zur ersten lauten deren Elemente

$$\exp(i(\nu-1)(\varkappa-1)2\pi/n)\left[\sum_{\mu=1}^{n} S_{1\mu} \exp(i(\nu-1)(\mu-1)2\pi/n) - \sigma\right] \tag{352}$$

$\varkappa$ ist wieder Zeilenindex und läuft von 1 bis n. Die Klammer kann als gemeinsamer Faktor vor die Determinante gezogen wer-

den, und der ν -te Eigenwert lautet

$$\sigma_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} S_{1\mu} \exp(i(\nu - 1)(\mu - 1)2\pi/n) \quad ; \quad 1 \leq \nu \leq n \qquad (353)$$

Damit ist zunächst nur gezeigt, daß die σ_ν Nullstellen des Polynoms (345) sind, das den Grad n besitzt. Es muß noch bewiesen werden, daß die σ_ν voneinander verschieden sind, erst dann ist das System der gefundenen Eigenwerte vollständig. Man nimmt an, daß $\sigma_{\nu_1} = \sigma_{\nu_2}$ für $\nu_1 \neq \nu_2$ $(1 \leq \nu_1, \nu_2 \leq n)$ gilt, dann folgt durch Koeffizientenvergleich der Darstellungen (353)

$$\exp(i(\nu_1 - 1)(\mu - 1)2\pi/n) = \exp(i(\nu_2 - 1)(\mu - 1)2\pi/n) \qquad (354)$$

Das ist jedoch für $\mu \geq 2$ sicher falsch, es muß also $\nu_1 = \nu_2$ gelten. Damit ist (197) bewiesen.

Zusammenfassung

Die Arbeit zeigt die Herleitung von Darstellungen des Transformationsverhaltens von n-Toren im Impedanz- (Admittanz-) und im Streumatrixformalismus. Ausgehend von der Reflexionsfaktortransformation zeigt sie Möglichkeiten zur Bestimmung von Streumatrixelementen aus Eingangsmessungen am n-Tor. Dabei werden insbesondere Verfahren zur Analyse nichtreziproker Zweitore (auf zwei Tore 'reduzierte' n-Tore) mit Hilfe reziproker Dreitore und Verfahren zur Analyse zyklisch symmetrischer Drei- und Viertore angegeben.

Wegen ihrer besonderen Bedeutung als nichtreziproke Bauelemente werden Zirkulatoren behandelt. Am Anfang der Betrachtungen steht eine Definition des idealen n-Tor Zirkulators, und danach werden Möglichkeiten zur Charakterisierung realer Zirkulatoren aufgezeigt. Als Ergänzung zu den Streumatrixanalysemethoden aus Eingangsmessungen sind Näherungslösungen für die Untersuchung realer, zyklisch symmetrischer Dreitorzirkulatoren angegeben.

Das Problem der Zirkulatorsynthese durch externe Maßnahmen an vorgegebenen Bauelementen bildet den Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen. Die Verfahren des Bezugsimpedanzwechsels und der Transformation mit Anpassungszweitoren werden mit den vom Verfasser entwickelten Formeln zur Synthese zyklisch symmetrischer Dreitorzirkulatoren verwendet und eingehend miteinander verglichen. Dabei werden die eventuellen Verluste der Bauelemente berücksichtigt.

Die Fortpflanzung von Meßfehlern ist Kernproblem einer experimentellen Anwendung der zu Beginn entwickelten Streumatrixanalysemethoden. Für Messungen mit dem Z-g-Diagraphen werden einfache Näherungen der Meßfehlerkorrelation angegeben, die es in vielen Fällen gestatten, wahrscheinliche Fehler der aus Eingangsreflexionsfaktoren berechneten Größen vorherzusagen. Gewisse Mittelungsmethoden bei der Berechnung von Streumatrixelementen tragen zur Erhöhung der Genauigkeit und zum Verklei-

nern der wahrscheinlichen Fehlerintervalle bei. Die experimentelle Untersuchung eines nichtreziproken, zyklisch symmetrischen Dreitors im Meterwellenbereich (Zirkulatoranordnung vom stripline-Typ) ergibt eine sehr gute Übereinstimmung gemessener und berechneter Streumatrixelemente.

Abschließend werden Dimensionierungen von Anpassungszweitoren für eine Zirkulatorsynthese mit dem vorliegenden Meßobjekt berechnet. Zur Optimierung wird insbesondere der neue Gesichtspunkt untersucht, wie man bei Verlusten des zugrundeliegenden Dreitors eine größtmögliche Leistungsübertragung des Gesamtdreitors bei idealer Sperrdämpfung zweier Tore und gleichzeitigem Verschwinden der Leistungsfehlanpassung erreichen kann.

Alle numerischen Rechnungen dieser Arbeit wurden an der zentralen Rechenanlage der Universität Marburg durchgeführt. Zum Aufstellen der Programme verwendete der Verfasser die Programmiersprache ALGOL.

Herrn Professor Dr. H. Wolter möchte ich für seine freundliche Unterstützung danken, mit der er es mir ermöglicht hat, das Thema zu behandeln und die Arbeit fertigzustellen. Ferner bin ich Herrn Professor Dr. S. Blume, Herrn Dr. G. Schiefer und Herrn Professor Dr. E. Schwartz für eingehende sachliche Kritik und wertvolle Gespräche zu Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis

[1] Abele, Th. A., Über die Streumatrix allgemein zusammengeschalteter Mehrpole. AEÜ 14 (1960), S. 262

[2] Auld, B. A., The synthesis of symmetrical waveguide circulators. Transact. Inst. Radio Engrs. MTT-7 (1959), p. 238

[3] Belevitch, V., Four-dimensional transformations of 4-pole matrices with applications to the synthesis of reactance-4-poles. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-3 (1956), p. 105

[4] Bosma, H., On the principle of stripline circulation. Proc. Inst. Radio Engrs. 109 pt. B, suppl. No. 21 (1962), p. 137

[5] Bosma, H., On stripline Y-circulation at UHF. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. MTT-12 (1964), p. 61

[6] Butterweck, H. J., Die Ersatzwellenquelle. AEÜ 14 (1960), S. 367

[7] Butterweck, H. J., Der Y-Zirkulator. AEÜ 17 (1963), S. 163

[8] Butterweck, H. J., Scattering bounds for the general lossless reciprocal three-port. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. CT-13 (1966), p. 290

[9] Carlin, H. J., The scattering matrix in network theory. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-3 (1956), p. 97

[10] Carlin, H. J., Singular network elements. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. CT-11 (1964), p. 67

[11] Carlin, H. J., On the existence of a scattering representation for passive networks. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. CT-14 (1967), p. 418

[12] Cauer, W., Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Akademie-Verlag, Berlin, 1954

[13] Chan, S.P., Topology, a shortcut to understanding systems. Electronics 20 (1967), p. 82

[14] Coates, Flow-graph solutions of linear algebraic equations. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-6 (1959), p. 170

[15] Helmholtz, H., Über einige Gesetze der Verteilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die tierisch-elektrischen Versuche. Poggendorffs Ann. 89 (1853), S. 211

[16] Humphreys, B. L., Davies, J. B., The synthesis of n-port circulators. Transact. Inst. Radio Engrs. MTT-10 (1962), p. 551

[17] Klein, W., Die Definition der Betriebsdämpfung und der Streumatrix bei komplexen Abschlußwiderständen. AEÜ 22 (1968), S. 567

[18] Kurokawa, K., Power waves and the scattering matrix. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. MTT-13 (1965), p. 194

[19] Mayer, H. F., Über das Ersatzschema der Verstärkerröhre. Telegr. u. Fernspr. Tech. 15 (1926), S. 335

[20] Mason, S. J., Feedback theory - some properties of signal flow graphs. Proc. Inst. Radio Engrs. 41 (1953), p. 1144

[21] Mason, S. J., Feedback theory - further properties of signal flow graphs. Proc. Inst. Radio Engrs. 44 (1956) p. 920

[22] Meinke, H., Gundlach, F.W., Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. Springer Verlag, Berlin 1962

[23] Penfield, P., Noise in negative-resistance amplifiers. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-7 (1960), p. 166

[24] Penfield, P., A classification of lossless three-ports. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-9 (1962), p. 215

[25] Schuon, E., Wolf, H., Die Darstellung von Mehrpolen durch die Streumatrix (Teil I und II). NTZ 12 (1959), S. 361 und S. 408

[26] Schwartz, E., Wechsel der Bezugsimpedanzen bei Streu- und Betriebsmatrizen. AEÜ 20 (1966), S. 357

[27] Schwartz, E., Streu- oder Betriebsmatrizen mit passiven und aktiven Bezugsimpedanzen. AEÜ 21 (1967), S. 317

[28] Schwartz, E., Über nichtreziproke, symmetrische Dreitore und Zirkulatoren. NTZ 6 (1967), S. 329

[29] Schwartz, E., Empirische Synthese verlustloser, symmetrischer Zirkulatoren. AEÜ 20 (1966), S. 621

[30] Schwartz, E., Broadband matching of resonant circuits and circulators. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. MTT-16 (1968), p. 158

[31] Sperner, E., Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra (Teil I). Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen, 1961

[32] Treuhaft, M. A., Network properties of circulators based on the scattering concept. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-3 (1956), p. 127

[33] Unger, H. G., Elektromagnetische Wellen (Teil II). Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1967

[34] Weinberg, L., Network analysis and synthesis. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1962

[35] Weinberg, L., Reciprocal and nonreciprocal systems, characteristic polynomials and driving point functions. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. CT-12 (1965), p. 294

[36] Youla, D. C., Castriota, L. J., Carlin, H. J., Bounded real scattering matrices and the foundations of linear passive network theory. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-6 (1959), p. 102

[37] Youla, D. C., On scattering matrices normalized to complex port numbers. Proc. Inst. Radio Engrs. 49 (1961), p. 1221

[38] Zuidweg, J. K., Every passive time-invariant n-port has at least one 'H-matrix'. Transact. Inst. Elect. Electron. Engrs. CT-12 (1965), p. 131

[39] Zurmühl, R., Matrizen. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 4. Auflage 1964

Lebenslauf

Am 7. 10. 1943 wurde ich als Sohn des Ingenieurs Franz Barbirz und seiner Ehefrau Elisabeth, geborene Röhrkohl, in Schwagstorf geboren. Meine Eltern wohnten damals in Bremen-Vegesack. Nach meiner Geburt zogen wir nach Zistersdorf in Niederösterreich und 1945 schließlich nach Innsbruck, wo ich von 1949 - 1951 die Volksschule besuchte. Da mein Vater gebürtiger Österreicher ist, wurde ich nach Kriegsende österreichischer Staatsangehöriger. 1951 kehrte die Familie nach Bremen-Vegesack zurück, und ich ging dort bis 1955 zur Grundschule. Anschließend besuchte ich das Gerhard-Rohlfs-Gymnasium, wo ich am 24. 2. 196 die Reifeprüfung ablegte. Vom Sommersemester 1962 an studierte ich Physik an der Philipps-Universität in Marburg/Lahn und bestand am 13. 7. 1967 die Diplom-Hauptprüfung. Am Institut für Angewandte Physik war ich bei Herrn Prof. Dr. Hans Wolter vom 1. 9. 1966 - 28. 2. 1967 als wissenschaftliche Hilfskraft und vom 1. 8. 1967 - 31. 7. 1970 als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle beschäftigt.